

согласуется с результатом нерелятивистской теории эффекта Доплера, выведенным в гл. 10. Правильность слагаемого порядка  $\beta^2$  при разложении в ряд уравнения (41) была экспериментально подтверждена Айвсом и Стилуэллом.

Айвс и Стилуэлл (Opt. Soc. Am. 28, 215 (1938); 31, 369 (1941)) выполнили спектральные опыты с пучками водородных атомов, находившихся в возбужденных электронных состояниях. Атомы, входившие в состав молекулярных водородных ионов  $H_2^+$  и  $H_3^+$ , ускорялись в сильном электрическом поле. Как продукт распада ионов образовывался атомарный водород. Скорость его атомов имела величину порядка  $\beta=0,005$ . Айвс и Стилуэлл определяли смещение средней длины волны отдельной спектральной линии, испускаемой атомами водорода. Средняя величина бралась по направлениям вперед ( $\lambda_v$ ) и назад ( $\lambda_n$ ) относительно траектории полета атомов. Из (42) получаем, считая  $\beta_v = -\beta_n$ , что средняя длина волны

$$\frac{1}{2}(\lambda_v + \lambda_n) = \frac{1}{2}\lambda_0 \left( \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right) = \frac{\lambda}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (43)$$

Итак, среднее положение смещенных линий сдвигается относительно длины волны  $\lambda_0$  света, излучаемого покоящимся атомом, на величину порядка  $\beta^2$ . В статье, опубликованной в 1941 г., Айвс и Стилуэлл сообщили, что наблюдаемое смещение средней длины волны равно  $0,074 \text{ \AA}$ , в то время как при расчете по формуле (43) для величины  $\beta$ , определенной по значению ускоряющего потенциала, приложенного к исходным ионам, получается смещение  $0,072 \text{ \AA}$ . Это является превосходным подтверждением релятивистской теории эффекта Доплера.

Поперечный эффект Доплера относится к наблюдениям, произведенным под прямым углом к направлению перемещения источника света, которым обычно является атом. В нерелятивистском приближении вообще нет поперечного эффекта Доплера. Теория относительности предсказывает существование этого поперечного эффекта Доплера для световых волн. Отношение частот должно быть обратным отношению интервалов времени в формуле (31), т. е.

$$\nu' = (1 - \beta^2)^{1/2} \nu, \quad (44)$$

где  $\nu$  — частота в системе отсчета, относительно которой атом неподвижен, а  $\nu'$  — частота, наблюдаемая в системе отсчета, движущейся относительно атома со скоростью  $V = \beta c$ .

#### 11.4. Часы, движущиеся с ускорением

В специальной теории относительности описываются и рассматриваются измерения, результаты которых не зависят от детального строения реальных тел. Теория ничего не говорит о динамическом действии ускорения, например о напряжениях, вызванных уско-

рением. Если такие напряжения отсутствуют или ими можно пренебречь, то эта теория может дать нам однозначное описание влияния ускорения на ход часов. Получается такой результат, как если бы в каждый момент часы, движущиеся с ускорением, перемещались с различной скоростью, но для каждой данной мгновенной скорости их ход можно рассчитать по уравнению (31).

Если это утверждение справедливо, то из него вытекают два следствия:

1. Если скорость движения часов постоянна по величине, но изменяется ее направление, то уравнение (31) выполняется без изменений. Система отсчета, связанная с часами, является неинерциальной.

2. Если эта скорость остается постоянной, за исключением коротких интервалов ускоренного или замедленного движения (интервалов, исчезающе коротких по сравнению со всем периодом времени), то уравнение (31) все-таки будет точно описывать соотношение между собственным временем и стационарным лабораторным временем.

Быстрая заряженная частица в постоянном магнитном поле движется с ускорением, перпендикулярным к направлению ее движения, а величина ее скорости совсем не изменяется. Если частица неустойчива, то измеренный период полураспада должен быть в точности равен тому периоду полураспада, который получился бы, если бы она двигалась прямолинейно с той же скоростью в отсутствие магнитного поля. Это предсказание подтверждается опытами с  $\mu$ -мезонами, распадающимися с периодом полураспада  $2,2 \cdot 10^{-6}$  сек на электрон и нейтрино. Одно и то же собственное время полураспада наблюдается как для свободно движущихся  $\mu^-$ -мезонов, так и для  $\mu^-$ -мезонов, совершающих спиральное движение в магнитном поле или даже неподвижных. Общеизвестно, что специальная теория относительности дает достаточно точное описание кругового (т. е. ускоренного) движения заряженных частиц в магнитном поле.

## Задачи

1. *Инвариант Лоренца.* Проверить, что из уравнений (14) следует:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2.$$

Заметьте, что если мы напишем:  $x_1 \equiv x$ ,  $x_4 \equiv ict$ ,  $i \equiv \sqrt{-1}$ , то

$$x^2 - c^2t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2.$$

2. *Преобразование Лоренца.* Вывести уравнения (15) из уравнений (14).

3. *Изменение объема.* Доказать, что если  $L_0^3$  — объем куба, покоящегося относительно системы отсчета  $S$ , то величина

$$L_0^3 (1 - \beta^2)^{1/2}$$

представляет собой его объем, наблюдаемый в системе отсчета  $S'$ , движущейся с постоянной скоростью  $\beta$  в направлении, параллельном ребру этого куба.

4. *Одновременность событий.* Исходя из преобразований Лоренца, показать, что два события, совершающиеся в системе отсчета  $S$  одновременно ( $t_1 = t_2$ ), но в разных точках ( $x_1 \neq x_2$ ), в общем случае не являются одновременными в системе отсчета  $S'$ .

5. *Сложение скоростей.* Показать, что если в системе отсчета  $S'$  составляющие скорости света равны  $v'_y = c \sin \varphi$  и  $v'_x = c \cos \varphi$ , то в системе отсчета  $S$  также выполняется равенство  $v_x^2 + v_y^2 = c^2$ . Система отсчета  $S'$  движется со скоростью  $V\hat{x}$  относительно системы отсчета  $S$ .

6.  $\pi^+$ -мезоны. а) Каково среднее время жизни потока  $\pi^+$ -мезонов, движущихся со скоростью  $\beta = 0,73$  (собственное среднее время жизни  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-8}$  сек)?

О т в е т.  $3,6 \cdot 10^{-8}$  сек.

б) Какое расстояние проходит  $\pi^+$ -мезон при  $\beta = 0,73$  за среднее время его жизни?

О т в е т. 800 см.

в) Какое расстояние прошел бы он при отсутствии релятивистских явлений?

О т в е т. 500 см.

г) Дать ответы на вопросы а), б) и в) при  $\beta = 0,99$ .

7.  $\mu$ -мезоны. Собственное среднее время жизни  $\mu$ -мезона приблизительно равно  $2 \cdot 10^{-6}$  сек. Предположим, что мощный поток  $\mu$ -мезонов, образовавшихся на какой-то высоте в атмосфере, движется вниз со скоростью  $V = 0,99c$ . Число столкновений в атмосфере на их пути вниз невелико. Исходя из того, что поверхности Земли достигает только 1% от числа мезонов в исходном потоке, оценить их начальную высоту (в собственной системе отсчета потока  $\mu$ -мезонов число частиц, остающихся через время  $t$ , определяется уравнением  $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ ).

О т в е т.  $2 \cdot 10^6$  см.

8. *Два события.* Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $S$  и  $S'$ . Пусть  $S'$  движется со скоростью  $V\hat{x}$  относительно  $S$ . В точке  $x'_1$  в момент  $t'_1$  происходит некоторое событие. В точке  $x'_2$ , в момент  $t'_2$  происходит другое событие. В момент  $t = t' = 0$  начала координат обеих систем совпадают. Найти значения времени и координат, соответствующие этим событиям в системе отсчета  $S$ .

9.  $\pi^+$ -мезоны. Поток, состоящий из  $10^4$   $\pi^+$ -мезонов, движется по круговой траектории радиусом 20 м со скоростью  $v = 0,99c$ . Собственное среднее время жизни  $\pi^+$ -мезона равно  $2,5 \cdot 10^{-8}$  сек.

а) Сколько мезонов останется, когда этот поток вернется в начальную точку движения?

б) Сколько мезонов осталось бы в потоке, если бы все они находились в неподвижности в начальной точке в течение того же промежутка времени?

10. *Скорость удаления галактик.* Как указывалось в гл. 10, данные относительно красного смещения излучения от далеких галактик свидетельствуют о том, что скорость их удаления, в нерелятивистской области значений, пропорциональна их расстоянию от нас:

$$V = \alpha r, \quad \alpha \cong 3 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-1}.$$

Рассчитать скорость удаления галактики, находящейся от нас на расстоянии  $3 \cdot 10^9$  световых лет. Является ли эта скорость релятивистской?

О т в е т.  $8,5 \cdot 10^9$  см/сек.

11. *Скорость относительного движения галактик.* Наблюдатель на Земле определил, что одна галактика удаляется в определенном направлении со скоростью  $v = 0,3c$ , а другая галактика удаляется в противоположном направлении с такой же скоростью. Какова будет скорость удаления одной галактики относительно наблюдателя, находящегося в другой галактике?

12. *Одновременность событий.* Представим себе два события, совершающиеся в точках  $A$  и  $B$ , неподвижных относительно системы отсчета  $S$  и расположенных на равных расстояниях от наблюдателя, находящегося в точке  $O$  той же системы отсчета  $S$ . Предположим, что в некоторый момент времени (по определению наблюдателя  $O$  в системе отсчета  $S$ ), когда происходят оба события, положение второго наблюдателя  $O'$  и движущаяся вместе с ним со скоростью  $V\hat{x}$  относительно  $S$

система отсчета  $S'$  совпадают соответственно с положением первого наблюдателя  $O$  и его системой отсчета  $S$  (рис. 11.22). Примем  $V/c=1/3$ .

а) Изобразить положения двух систем отсчета и точек  $A, A', B, B'$  в момент, когда сигнал из  $B'$  достигает наблюдателя  $O'$ . Достиг ли этот сигнал наблюдателя  $O$ ? Почему?

б) Изобразить положения систем отсчета  $S$  и  $S'$  в момент, когда оба сигнала достигают  $O$ .

в) Изобразить положения систем отсчета  $S$  и  $S'$  в момент, когда сигнал из  $A'$  достигает  $O'$ .

г) Предполагая, что оба события объективно регистрируются в точках  $A'$  и  $B'$ , например, на фотографических пластинках, показать, что при выполнении условий этой задачи расстояния  $A'O'$  и  $B'O'$  равны.

д) Показать, что для наблюдателя  $O'$  оба события не являются одновременными. При определении понятия одновременности обязательно предполагается, что скорость света во всех случаях постоянна. Чтобы эта зависимость стала ясной, проведите следующее рассуждение. Пусть два события в точках  $A$  и  $B$  представляют собой звуковые сигналы, испускаемые одновременно для наблюдателя  $O$ , т. е. для наблюдателя, покоящегося относительно среды, в которой распространяется звук.

Пусть  $O'$  — это наблюдатель, движущийся со скоростью  $V$ , равной одной трети скорости звука.

е) Применив преобразование Галилея, показать, что скорости движения звуковых сигналов из  $A'$  и  $B'$  по направлению к  $O'$  не одинаковы.

ж) Показать, что даже если оба звуковых сигнала достигают  $O'$  в разные моменты времени, то это компенсируется различием скоростей, с которыми распространялись эти сигналы, так что наблюдателю  $O'$  эти два события все-таки кажутся одновременными.

13. Релятивистское смещение Доплера. Протоны ускоряются напряжением в 20 кв, после чего они движутся с постоянной скоростью в области, где происходит их нейтрализация, приводящая к образованию атомов водорода и сопровождающаяся испусканием света. Спектральная линия  $H_\beta$  ( $\lambda=4861,33 \text{ \AA}$  для покоящегося атома;  $1 \text{ \AA}=10^{-8} \text{ см}$ ) наблюдается с помощью спектрометра. Оптическая ось спектрометра параллельна направлению движения ионов. В спектре наблюдается смещение Доплера из-за движения ионов в том же направлении, в котором происходит испускание света. В приборе имеется также зеркало, установленное так, чтобы в поле зрения на этот спектр налагался спектр света, испускаемого в противоположном направлении.

а) Какова скорость протонов после ускорения?

б) Рассчитать доплеровское смещение первого порядка, зависящее от  $v/c$  и соответствующее движению источника вперед и назад, и показать схематически вид данной части спектра.

в) Рассмотреть затем эффект второго порядка, зависящий от  $v^2/c^2$  и появляющийся при учете релятивистских соотношений. Показать, что смещение второго порядка приблизительно равно  $1/2 \lambda \cdot (v^2/c^2)$ , и оценить его численную величину для данной задачи. Заметьте, что оно одинаково как для движения со скоростью  $+v$ , так и для движения со скоростью  $-v$ .

а) Какова скорость протонов после ускорения?  
 Ответ.  $2 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$ .

б) Рассчитать доплеровское смещение первого порядка, зависящее от  $v/c$  и соответствующее движению источника вперед и назад, и показать схематически вид данной части спектра.

в) Рассмотреть затем эффект второго порядка, зависящий от  $v^2/c^2$  и появляющийся при учете релятивистских соотношений. Показать, что смещение второго порядка приблизительно равно  $1/2 \lambda \cdot (v^2/c^2)$ , и оценить его численную величину для данной задачи. Заметьте, что оно одинаково как для движения со скоростью  $+v$ , так и для движения со скоростью  $-v$ .

### Математическое дополнение. Пространство — время

Представления о пространстве — времени, т. е. математический язык, на котором особенно просто и изящно выражается содержание специальной теории относительности, были разработаны Г. Минковским в 1908 г., т. е. после того, как Эйнштейн уже изложил эту теорию. Идеи Минковского не содержат принципиально новых положений, не вытекающих также из наших предыдущих рассуждений, но он предложил такую математическую форму специальной теории отно-