величина четырехмерного вектора является инвариантом преобразования Лоренца:

$$\sum_{\mu=1}^{4} p_\mu p_\mu = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - \frac{E^2}{c^2} = -(Mc)^2. \tag{66}$$

Это соотношение выводится в гл. 12. Подобно ему, величины

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu x_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = -s^2, \tag{67}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu p_\mu = xp_x + yp_y + zp_z - tE \tag{68}$$

также представляют собой скалярные инварианты.

Сумма двух или большего числа четырехмерных векторов также является четырехмерным вектором: $P_\mu \equiv p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)}$; P_μ — это вектор, так что из уравнения (66) можно вывести другой скалярный инвариант, а именно:

$$\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu P_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} \left(p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)}\right)^2 = (\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)})^2 - \frac{1}{c^2}(E^{(1)} + E^{(2)})^2 =$$

$$= 2\left\{\mathbf{p}^{(1)}\cdot\mathbf{p}^{(2)} - \frac{E^{(1)}E^{(2)}}{c^2}\right\} - (M^{(1)}c)^2 - (M^{(2)}c)^2. \tag{69}$$

В гл. 12 мы получим уравнения (65) и (69), не ссылаясь на понятия четырехмерного вектора и пространства — времени. Однако, познакомившись с этими понятиями, мы овладели еще одним приемом теоретического анализа и получили простой и изящный метод составления уравнений, инвариантных относительно преобразования Лоренца. Этот метод открывает возможность для дальнейших обобщений, ведущих к более абстрактным и математически усложненным теориям — релятивистской квантовой теории и общей теории относительности Эйнштейна. Возможность составлять уравнения, инвариантные относительно преобразования Лоренца, не доказывая в каждом отдельном случае их инвариантность, позволяет физикам рассматривать еще более сложные проблемы, которые не могли бы быть решены иным путем.

Преобразование Лоренца соответствует поворотам системы координат в пространстве — времени. В специальной теории относительности доказывается инвариантность физических законов только относительно этого типа преобразований. Обычная векторная алгебра дает нам систему обозначений, не зависящую от какой-либо конкретной системы координат в обычном трехмерном пространстве. Значение открытия Эйнштейна состоит в обобщении собственно преобразования Лоренца и простой геометрии четырехмерного пространства — времени. В общей теории относительности Эйнштейн доказал возможность выразить физические законы в форме, независимой от любых преобразований в пространстве — времени, а не только преобразований перехода от одной неускоренной системы отсчета к другой. При этом четырехмерное пространство — время уже не является пространством с евклидовой геометрией — наоборот, оно может обладать кривизной.

Из истории физики. Одновременность в специальной теории относительности

Мы приводим начало первой статьи Эйнштейна по специальной теории относительности. Особенно важное значение имеет содержащееся в ней обсуждение понятия одновременности.

К электродинамике движущихся тел *)

А. Эйнштейн

Известно, что электродинамика Максвелла в современном ее виде приводит к заключению об асимметрии в явлениях движения тел, которая, по-видимому, несвойственна этим явлениям. Представим себе, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником с током. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как согласно обычному представлению приходится строго различать два случая, в которых движется или одно, или другое из этих тел. В самом деле, если движется магнит, а проводник неподвижен, то вокруг магнита возникает электрическое поле с определенной энергией, создающее ток в тех местах, где находятся части проводника. Если же неподвижен магнит, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля, но зато мы обнаруживаем в проводнике электродвижущую силу, которой самой по себе не соответствует никакая энергия, но которая (считаем, что в обоих обсуждаемых случаях относительное движение одинаково) вызывает электрические токи той же величины и того же направления, что и токи, вызванные электрическим полем в первом случае.

Примеры подобного рода, а также неудачные попытки обнаружить какое-либо движение Земли относительно «светоносной среды» приводят к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя. Более того, они свидетельствуют о том, что для всех систем координат, в которых выполняются уравнения механики, должны быть справедливы те же самые законы электродинамики и оптики, как это уже было доказано для величин первого порядка малости **). Эту гипотезу (содержание которой мы будем ниже называть «принципом относительности») мы намерены превратить в постулат и введем также другой постулат, который только кажется не согласующимся с первым, а именно, что в пустоте свет всегда распространяется с определенной скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Этих двух постулатов достаточно для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для неподвижных тел, построить свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Будет доказано, что введение «светоносного эфира» излишне, поскольку в предлагаемой теории не вводится наделенное особыми свойствами «абсолютно неподвижное пространство», а также ни одной точке пустого пространства, где происходят электромагнитные явления, не приписывается вектор скорости.

Развиваемая теория основывается, подобно всей электродинамике, на кинематике твердого тела, потому что утверждения любой такой теории касаются соотношений между твердыми телами (системами координат), часами и электромагнитными явлениями. Недостаточное понимание этого обстоятельства является причиной тех трудностей, которые в настоящее время должна преодолевать электродинамика движущихся тел.

I. Кинематическая часть

§ 1. Определение одновременности. Выберем систему координат, в которой хорошо ***) выполняются уравнения механики Ньютона. Чтобы сделать наши представления более точными и чтобы по названию отличить эту систему координат от вводимых позже систем координат, назовем ее «покоящейся системой».

Если некоторая материальная точка покоится относительно этой системы координат, то ее положение относительно последней может быть определено

---

*) Выдержка из статьи А. Эйнштейна в «Annalen der Physik» 17, 891—921 (1905). Примечания к тексту также принадлежат автору статьи, если не оговорено обратное. (Русский перевод: А. Эйнштейн, Сборник научных трудов, «Наука», 1965, т. I, стр. 7. (*Прим. ред.*))

**) В то время автору еще не была известна ранее опубликованная работа Лоренца. (*Прим. авторов курса*)

***) То есть в первом приближении. (*Прим. авторов курса*) с помощью жестких масштабов методами евклидовой геометрии и выражено в декартовых координатах.

Желая описать *движение* материальной точки, мы задаем значения ее координат как функций времени. Однако мы не должны забывать, что подобное математическое описание только тогда имеет физический смысл, когда мы предварительно уясним, что подразумевается под «временем». Мы должны учитывать, что все наши суждения, в которых время играет какую-то роль, всегда являются суждениями о *событиях, совершающихся одновременно*. Если, например, я говорю: «Этот поезд прибывает сюда в 7 часов», то я подразумеваю следующее: «Указание маленькой стрелки моих часов на 7 часов и прибытие поезда — это события, совершающиеся одновременно» *).

Казалось бы, что можно преодолеть все трудности, касающиеся определения «времени», заменив слово «время» словами «положение маленькой стрелки моих часов». Действительно, это определение удовлетворительно в случае, когда мы стремимся определить время лишь для того самого места, где находятся часы; однако оно уже не является удовлетворительным, когда нам надо связать друг с другом во времени события, происходящие в различных местах, или — что то же самое — определить время для событий, происходящих в местах, удаленных от часов.

Мы могли бы, конечно, удовлетвориться значениями времени, определенными наблюдателем, который вместе с часами находится в начале координат и сопоставляет соответствующие положения стрелок часов с каждым световым сигналом, идущим к нему через пустоту и дающим знать о регистрируемых событиях. Но этот способ обладает тем недостатком, что, как мы знаем из опыта, он не независим от местонахождения наблюдателя с часами. Мы придем к способу определения, гораздо лучше соответствующему практике, путем следующих рассуждений.

Если в точке A пространства расположены часы, то наблюдатель, находящийся в A, может определять значения времени для событий, совершающихся в непосредственной близости от A, путем наблюдения одновременных с этими событиями положений стрелок часов. Если в другой точке B пространства находятся другие часы с точно такими же свойствами, то наблюдатель в B может определить значения времени для событий в непосредственной близости от B. Однако без дальнейших предположений невозможно произвести сравнение по времени события в A с событием в B. До сих пор мы определили только «время A» и «время B», но не общее для A и B время. Это последнее можно установить, *вводя определение*, что «время», необходимое для распространения света из A в B, равняется «времени», требуемому для распространения его из B в A. Пусть луч света выходит в момент t_A по «времени A» из точки A в направлении B; пусть он в момент t_B по «времени B» отражается от B к A и опять достигает точки A в момент t'_A по «времени A».

По определению двое часов в A и B будут идти синхронно, если

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Мы предполагаем, что это определение синхронности можно дать непротиворечивым образом и притом для любого числа точек, так что всегда справедливы следующие утверждения:

1. Если часы в B идут синхронно с часами в A, то часы в A идут синхронно с часами в B.
2. Если часы в A идут синхронно как с часами в B, так и с часами в C, то часы в B и C также идут синхронно друг с другом.

Таким образом, с помощью определенных (мысленных) физических экспериментов мы установили, чтó следует понимать под синхронно идущими, находящимися в различных местах, покоящимися часами, и получили ясное определение понятия «одновременности», или «синхронности», и понятия «времени». «Время»

*) Мы не будем здесь обсуждать неточность, содержащуюся в понятии одновременности двух событий, совершающихся приблизительно в одном месте, которую можно устранить также с помощью некоторой абстракции.

события» — это то время, которое определяется одновременно с событием по покоящимся часам, находящимся в месте события, причем для всех определений времени эти часы идут синхронно с некоторыми определенными покоящимися часами.

В соответствии с опытом мы считаем также, что величина

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c$$

является универсальной постоянной — скоростью света в пустом пространстве.

Существенно то, что время определяется с помощью часов, покоящихся относительно покоящейся системы координат, и таким образом определенное время, поскольку оно относится к покоящейся системе, мы будем называть «временем покоящейся системы».

§ 2. Об относительности длин и промежутков времени. Последующие рассуждения основываются на принципе относительности и на принципе постоянства скорости света. Эти два принципа мы формулируем следующим образом:

1. Законы, согласно которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух систем координат, движущихся одна относительно другой равномерно и прямолинейно, относятся эти изменения состояния.

2. В «покоящейся» системе координат любой луч света движется с определенной скоростью c независимо от того, испускался ли этот луч покоящимся или движущимся телом. Отсюда следует:

$$\text{скорость света} = \frac{\text{путь луча света}}{\text{интервал времени}},$$

где «интервал времени» следует понимать в смысле определения, данного в § 1.

Пусть имеется покоящийся твердый стержень; пусть его длина, измеренная с помощью также покоящегося масштаба, равна l. Теперь представим себе, что ось стержня совпадает с осью x покоящейся системы координат и что этому стержню сообщено равномерное поступательное движение, заключающееся в параллельном переносе его со скоростью v вдоль оси x в направлении возрастания x. Теперь мы хотим определить длину *движущегося* стержня и представляем себе, что его длину можно установить с помощью одной из следующих двух операций:

а) Наблюдатель движется вместе с указанным масштабом и с измеряемым стержнем и измеряет длину стержня непосредственно, прикладывая масштаб точно таким же образом, как если бы все эти три тела находились в покое.

б) С помощью покоящихся часов, установленных в покоящейся системе и синхронизированных в соответствии с § 1, наблюдатель определяет, в каких точках покоящейся системы находятся в определенный момент времени t оба конца измеряемого стержня. Расстояние между этими двумя точками, измеренное с помощью уже использовавшегося масштаба, который в этом случае также покоится, есть длина, которую можно обозначить, как «длину стержня».

В соответствии с принципом относительности длина, определяемая посредством операции а) — мы назовем ее «длиной стержня в движущейся системе»,— должна быть равна длине стержня в условиях покоя.

Длину, устанавливаемую посредством операции б), мы назовем «длиной (движущегося) стержня в покоящейся системе». Эту длину мы определим на основе наших двух принципов, и мы найдем, что она отличается от l.

В обычно применяемой кинематике молчаливо предполагается, что длины, определенные посредством обеих указанных операций, равны между собой, или, иными словами, что в геометрическом отношении движущееся твердое тело в момент t вполне можно заменить тем же телом, находящимся в данном положении *в состоянии покоя.*

Предположим, далее, что на обоих концах стержня (A и B) укреплены часы, синхронные с часами покоящейся системы, т. е. что в любой момент времени их показания соответствуют «времени покоящейся системы» в тех точках, где находятся эти часы. Таким образом, эти часы «синхронны в покоящейся системе».

Представим себе, далее, что около каждых часов находится движущийся вместе с ними наблюдатель и что эти наблюдатели применяют к обоим часам сформулированный в § 1 критерий синхронности хода двух часов. Пусть в момент времени *) t_A луч света выходит из A, в момент времени t_B он отражается в точке B, а в момент времени t'_A возвращается в A. Учитывая принцип постоянства скорости света, находим

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}$$

и

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v},$$

где r_{AB} — длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе. Итак, наблюдатели, движущиеся вместе с движущимся стержнем, должны обнаружить, что часы в точках A и B не идут синхронно, в то время как наблюдатели в покоящейся системе должны утверждать, что часы синхронны.

Итак, мы видим, что понятию одновременности нельзя придавать *абсолютное* значение, а два события, которые при наблюдении из одной системы координат являются одновременными, уже не могут считаться одновременными при рассмотрении из системы координат, движущейся относительно первой системы...

---

*) «Время» означает здесь «время покоящейся системы» и также «положение стрелок движущихся часов, находящихся в том месте, о котором идет речь».