

система отсчета  $S'$  совпадают соответственно с положением первого наблюдателя  $O$  и его системой отсчета  $S$  (рис. 11.22). Примем  $V/c=1/3$ .

а) Изобразить положения двух систем отсчета и точек  $A, A', B, B'$  в момент, когда сигнал из  $B'$  достигает наблюдателя  $O'$ . Достиг ли этот сигнал наблюдателя  $O$ ? Почему?

б) Изобразить положения систем отсчета  $S$  и  $S'$  в момент, когда оба сигнала достигают  $O$ .

в) Изобразить положения систем отсчета  $S$  и  $S'$  в момент, когда сигнал из  $A'$  достигает  $O'$ .

г) Предполагая, что оба события объективно регистрируются в точках  $A'$  и  $B'$ , например, на фотографических пластинках, показать, что при выполнении условий этой задачи расстояния  $A'O'$  и  $B'O'$  равны.

д) Показать, что для наблюдателя  $O'$  оба события не являются одновременными. При определении понятия одновременности обязательно предполагается, что скорость света во всех случаях постоянна. Чтобы эта зависимость стала ясной, проведите следующее рассуждение. Пусть два события в точках  $A$  и  $B$  представляют собой звуковые сигналы, испускаемые одновременно для наблюдателя  $O$ , т. е. для наблюдателя, покоящегося относительно среды, в которой распространяется звук.

Пусть  $O'$  — это наблюдатель, движущийся со скоростью  $V$ , равной одной трети скорости звука.

е) Применив преобразование Галилея, показать, что скорости движения звуковых сигналов из  $A'$  и  $B'$  по направлению к  $O'$  не одинаковы.

ж) Показать, что даже если оба звуковых сигнала достигают  $O'$  в разные моменты времени, то это компенсируется различием скоростей, с которыми распространялись эти сигналы, так что наблюдателю  $O'$  эти два события все-таки кажутся одновременными.

**13. Релятивистское смещение Доплера.** Протоны ускоряются напряжением в 20 кв, после чего они движутся с постоянной скоростью в области, где происходит их нейтрализация, приводящая к образованию атомов водорода и сопровождающаяся испусканием света. Спектральная линия  $H_{\beta}$  ( $\lambda=4861,33 \text{ \AA}$  для покоящегося атома;  $1 \text{ \AA}=10^{-8} \text{ см}$ ) наблюдается с помощью спектрометра. Оптическая ось спектрометра параллельна направлению движения ионов. В спектре наблюдается смещение Доплера из-за движения ионов в том же направлении, в котором происходит испускание света. В приборе имеется также зеркало, установленное так, чтобы в поле зрения на этот спектр налагался спектр света, испускаемого в противоположном направлении.

а) Какова скорость протонов после ускорения?

Ответ.  $2 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$ .

б) Рассчитать доплеровское смещение первого порядка, зависящее от  $v/c$  и соответствующее движению источника вперед и назад, и показать схематически вид данной части спектра.

в) Рассмотреть затем эффект второго порядка, зависящий от  $v^2/c^2$  и появляющийся при учете релятивистских соотношений. Показать, что смещение второго порядка приблизительно равно  $\frac{1}{2}\lambda \cdot (v^2/c^2)$ , и оценить его численную величину для данной задачи. Заметьте, что оно одинаково как для движения со скоростью  $+v$ , так и для движения со скоростью  $-v$ .

**Математическое дополнение. Пространство — время**

Представления о пространстве — времени, т. е. математический язык, на котором особенно просто и изящно выражается содержание специальной теории относительности, были разработаны Г. Минковским в 1908 г., т. е. после того, как Эйнштейн уже изложил эту теорию. Идеи Минковского не содержат принципиально новых положений, не вытекающих также из наших предыдущих рассуждений, но он предложил такую математическую форму специальной теории отно-

сительности, которая наиболее естественно обобщается в виде общей теории относительности. Минковский начал свою статью следующими словами:

«Взгляды на пространство и время, которые я хочу изложить вам, выросли на почве экспериментальной физики, и в этом заключается их сила. Они радикально изменяют прежние представления. Отныне понятия пространства самого по себе и времени самого по себе осуждены на отмирание и превращение в бледные тени, и только своего рода объединение этих двух понятий сохранит независимую реальность».

Дж. А. Уилер так излагает сущность вопроса: «Фактически время — это длина, а не независимое от нее понятие. Чтобы уяснить, насколько неверно обычное различие между пространством и временем, представим себе такое несовместимое применение различных мер длины, когда ширина шоссе измеряется в футах, а его длина — в милях. Однако в такой же степени несовместимо измерение интервалов в одном направлении пространства — времени в секундах, а в трех других направлениях — в сантиметрах. Пересчетный множитель, переводящий одну метрическую единицу длины в „пространственных“ направлениях (*см*) в другую метрическую единицу тоже длины во „временном“ направлении (*сек*), равен скорости света, числовая величина которой — это  $3 \cdot 10^{10}$  *см/сек*. Но ведь величина этого множителя в такой же мере обусловлена историческими причинами, а по существу случайна, как и величина пересчетного множителя 5280, переводящего футы в мили. Можно обойтись без „объяснения“ множителя  $3 \cdot 10^{10}$ , точно так же как нет необходимости „объяснять“ множитель 5280».

Пространство имеет три измерения: положение частицы или местонахождение любого события определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ . У нас уже имеется математический язык, а именно язык векторного исчисления, с помощью которого мы можем формулировать утверждения о соотношениях между точками или линиями в форме, не зависящей от любой конкретной системы координат. Можем ли мы построить аналогичный язык, который даст нам возможность выражать физические законы специальной теории относительности в форме, также не зависящей от системы отсчета? Если физические законы выражаются безотносительно к какой-либо конкретной системе отсчета, то они будут автоматически инвариантны при преобразованиях Лоренца, которые переводят нас из одной системы отсчета в другую.

Физические законы описывают движение частиц от одной точки к другой. Ускоренное движение, столкновения частиц и радиоактивный распад — вот примеры явлений, для описания которых необходимы как пространственные координаты, так и время. Чтобы выразить эти законы графически, мы используем систему координат с тремя пространственными осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и четвертой осью, осью времени  $t$ , перпендикулярной к трем другим. Это трудно представить наглядно, но математически ничуть не труднее сформулировать, чем определение системы, состоящей из трех осей координат. Мы можем проще всего изобразить пространственно-временную систему координат на графике, если проведем одну пространственную ось  $x$  и одну временную ось  $t$ . Тремя пространственными и одной временной осью определяется четырехмерный континуум, носящий название *пространство — время*. Любая точка  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $t_0$  в пространстве — времени называется *событием*: ее четыре координаты указывают нам, когда и где оно совершается. Типичным примером события может служить соударение двух частиц. В догелятивистской физике время события  $t_0$  было одним и тем же для всех наблюдателей. При переходе от одной инерциальной системы отсчета  $S$  к другой системе  $S'$  временная координата никогда не изменялась:  $t_0 = t'_0$ . В догелятивистской физике пространство и время определялись как *независимые* понятия.

Однако в теории относительности преобразование Лоренца объединяет временную и пространственную координаты, когда мы совершаем переход от одной системы отсчета к другой:

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}. \quad (45)$$

В результате объединения пространства и времени в одну четырехмерную реальность — пространство — время, все четыре измерения которого в принципе

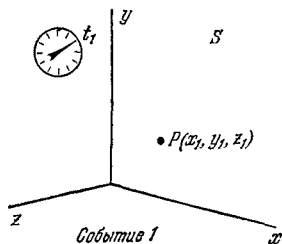


Рис. 11.23. Для дальнейших рассуждений нам надо определить, что называется событием: *событие* определяется точкой в пространстве  $P(x_1, y_1, z_1)$ , где оно совершается, и моментом времени  $t_1$ , когда оно совершается.

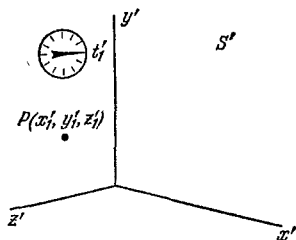


Рис. 11.24. То же самое событие, конечно, можно описать другими числами  $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$  в другой инерциальной системе отсчета  $S'$ .

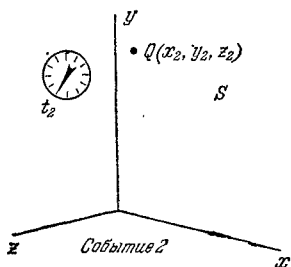


Рис. 11.25. По определению *интервал* между событиями 1 и 2 в системе отсчета  $S$  равен  $s$ ,

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

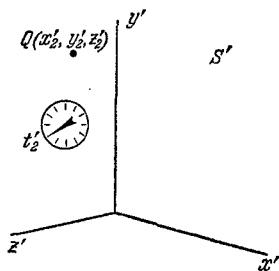


Рис. 11.26. В системе  $S'$  интервал между событиями 1 и 2 равен  $s'$ ,

$$s'^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2.$$

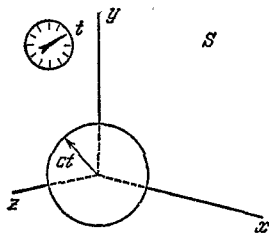


Рис. 11.27. Интервал  $s$  между испусканием светового сигнала (при  $t=0$ ) и приемом его в какой-либо точке  $(x, y, z)$  равен нулю:

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t^2 - c^2 t^2 = 0.$$

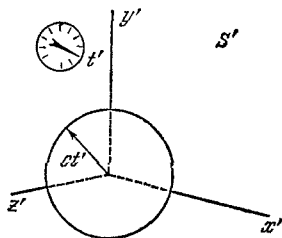


Рис. 11.28. В системе  $S'$  интервал  $s'$  между событиями излучения светового сигнала и его приема равен нулю. Таким образом, в этом случае  $s = s'$ .

эквивалентны, получается стройная система записи величин, инвариантных относительно преобразования Лоренца. При поворотах в обычном трехмерном пространстве преобразуются только пространственные координаты: например, при повороте на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$  координаты преобразуются по следующим формулам:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (46)$$

т. е. для определения  $x'$  и  $y'$  совершается преобразование координат  $x$  и  $y$ . В преобразовании Лоренца участвуют  $x$  и  $t$ . Ввиду того, что ни один сигнал не распространяется быстрее, чем со скоростью света, два события не могут влиять друг на друга, если каждое из них находится вне светового конуса другого (рис. 11.29). Если одно событие находится вне светового конуса другого события, то это свойство сохраняется и в любой другой системе отсчета, независимо от скорости ее движения. Мы знаем, что выражения  $x^2 - (ct)^2$  и  $(\Delta x)^2 - (c \Delta t)^2$  остаются инвариантными при преобразовании Лоренца. Эти выражения имеют одну и ту же числовую величину во всех системах отсчета, равномерно движущихся одна относительно другой:

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s)^2. \quad (47)$$

Здесь через  $\Delta x$  и  $\Delta t$  обозначены разности соответственно пространственных и временных координат двух событий, измеренные в системе отсчета  $S$ , а через  $\Delta x'$  и  $\Delta t'$  — те же разности, измеренные в системе отсчета  $S'$ . Если в системе  $S$  каждое из двух событий находится вне светового конуса другого события, то

$$|c \Delta t| < |\Delta x|$$

и

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0. \quad (48)$$

Так как функция, находящаяся в левой части неравенства (48), инвариантна при преобразованиях Лоренца, то это неравенство должно выполняться во всех системах отсчета. Если в системе отсчета  $S$  каждое из двух событий находится на поверхности светового конуса другого события, то  $(\Delta s)^2 = 0$  как в  $S$ , так и в  $S'$ .

Предположим, что в системе  $S$  событие 2 находится внутри светового конуса события 1, т. е.  $|c \Delta t| > |\Delta x|$ , где  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Следовательно, так же и в системе  $S'$ :

$$(c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 > 0, \quad (49)$$

и событие 2 всегда находится внутри светового конуса будущего для события 1. При этом сигнал от события 1 может достигнуть точки  $x_2$  в момент события 2 и раньше его. То, что происходит при событии 1, может влиять на то, что происходит при событии 2, и между этими событиями может существовать какая-либо причинная связь. Нечто происходящее при событии 1 может вызвать или изменить событие 2.

Величина  $\Delta s$ , определенная согласно уравнению (47), называется *интервалом* между двумя событиями. Если каждое из двух событий находится вне светового конуса другого события, то

$$c^2 (\Delta t)^2 < (\Delta x)^2 \quad (50)$$

и этот инвариант отрицателен:

$$(\Delta s)^2 < 0. \quad (51)$$

В этом случае мы называем интервал *пространственноподобным*. Если каждое из

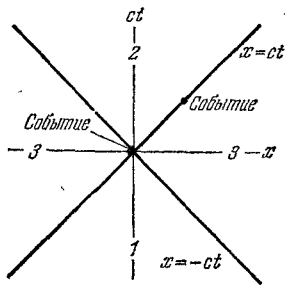


Рис. 11.29. Схема светового конуса. Пространственная координата (или координаты) представлена через  $x$ , время — через  $t$ . Точки, соответствующие всем событиям, которые отделены от события при  $x=0, t=0$  интервалом, равным нулю, находятся на прямых  $x = \pm ct$ . 1 — абсолютное прошлое; 2 — абсолютное будущее; 3 — область событий, абсолютно не связанных с  $x=0, t=0$ .

двух событий находится внутри светового конуса другого события, то

$$(\Delta s)^2 > 0, \quad (52)$$

и мы называем такой интервал *временеподобным*. Для того частного случая, когда два события могут быть связаны световым сигналом, мы получаем

$$(\Delta s)^2 = 0, \quad (53)$$

и такой интервал является *светоподобным*.

| Соотношение между координатами и временем для двух событий | Тип интервала           | Характер связи между событиями               |
|--|-------------------------|--|
| $c \Delta t  <  \Delta x $ ; $(\Delta s)^2 < 0$            | Пространственноподобный | Нет причинной связи                          |
| $c \Delta t  >  \Delta x $ ; $(\Delta s)^2 > 0$            | Временеподобный         | Может быть причинная связь                   |
| $c \Delta t  =  \Delta x $ ; $(\Delta s)^2 = 0$            | Светоподобный           | События могут быть связаны световым сигналом |

Хотя понятие одновременности не имеет в теории относительности точного смысла, определения будущего и прошлого имеют определенный инвариантный смысл для всех систем отсчета. *Прошлое* — это множество всех событий, которые

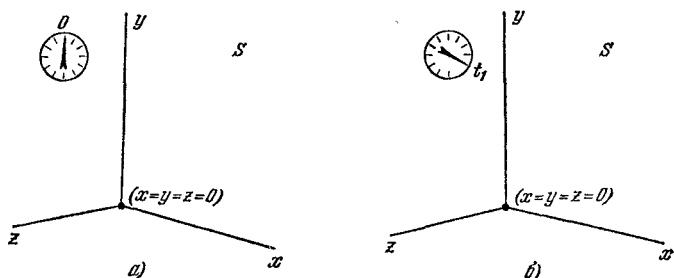


Рис. 11.30. а) Не все интервалы равны нулю. Вот событие:  $x=y=z=t=0$ . б) Вот другое событие:  $x=y=z=0$ ,  $t=t_1$ . Интервал между этими двумя событиями равен  $s$ , где  $s^2=c^2t_1^2 > 0$ . Интервалы, для которых  $s^2 > 0$ , называются *временеподобными*.

в принципе могли бы оказать воздействие на нас здесь и сейчас. Эти события находятся в световом конусе прошлого. *Будущее* — это все те события, на которые в принципе может влиять то, что мы делаем здесь и сейчас. Эти события находятся в световом конусе будущего. Все события вне обоих световых конусов находятся в пространственноподобных областях; на них не может влиять то, что мы делаем здесь и сейчас, и они также не могут влиять на то, что мы делаем здесь и сейчас.

Наша траектория в пространстве — времени называется *мировой линией*; это маршрут, задающий наше положение и время. Так как скорость нашего перемещения никогда не может превзойти скорость света, то все события, уже совершившиеся в нашей жизни и до нее, находятся внутри нашего конуса прошлого, а все события, которые совершатся, должны находиться внутри нашего конуса будущего (рис. 11.36).

Если бы вместо одного пространственного измерения мы рассматривали три, то, поскольку при относительной скорости  $V$  в направлении  $x$  преобразование

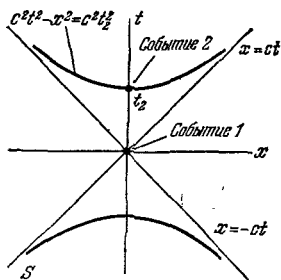


Рис. 11.31. Точки, соответствующие всем событиям, отделенным от события 1 одинаковым времениподобным интервалом  $s$ , где  $s^2 = c^2 t_2^2$ , лежат на показанной здесь гиперболе.

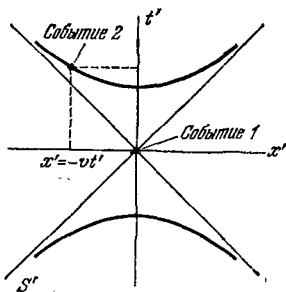


Рис. 11.32. Так как квадрат интервала  $s^2$  является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца, то на схеме светового конуса системы  $S'$  получается та же гипербола. Но точка, соответствующая событию 2, находится на другом месте. Почему?

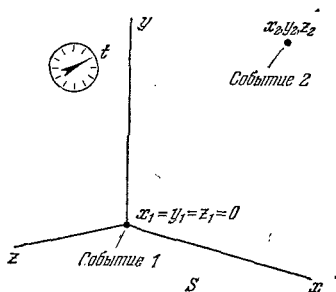


Рис. 11.33. Другой пример: два события с различными пространственными координатами, но с одинаковым временем. Для них  $s^2 = -(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 < 0$ . Интервалы, для которых  $s^2 < 0$ , называются пространственноподобными.

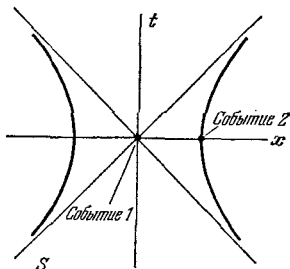


Рис. 11.34. Точки, соответствующие всем событиям, отделенным от события 1 таким же интервалом, что и событие 2, лежат на показанной здесь гиперболе.

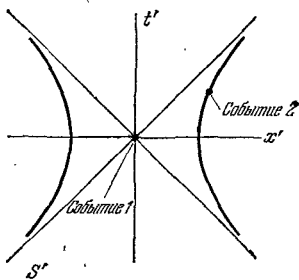


Рис. 11.35. Так как интервал  $s$  является инвариантом, то на схеме для системы отсчета  $S'$  получается та же гипербола. И снова точка, соответствующая событию 2, не находится в том же положении, в каком она была для системы  $S$ .

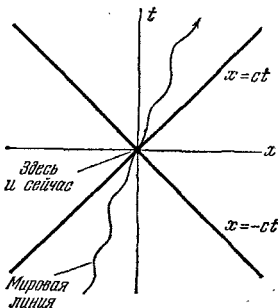


Рис. 11.36. «Мировая линия» — это последовательность событий, в которой более поздние причинно связаны с более ранними. Поэтому она должна находиться внутри светового конуса, как здесь показано.

Лоренца дает  $y'=y$  и  $z'=z$ , мы должны опять получить инвариантный квадрат интервала в системе отсчета  $S$ :

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (54)$$

и тот же квадрат интервала в какой-то другой системе отсчета  $S'$ :

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \quad (55)$$

За исключением знаков минус,  $(\Delta s)^2$  имеет тот же вид, что и выраженный в декартовых координатах квадрат расстояния между двумя точками пространства, не обладающего кривизной. И опять же за исключением знаков минус, уравнение (55) выглядит так же, как формула квадрата расстояния, выраженного в другой декартовой системе координат, повернутой относительно первой. Можно углубить эту аналогию, толкуя преобразование Лоренца как своего рода поворот в пространстве — времени.

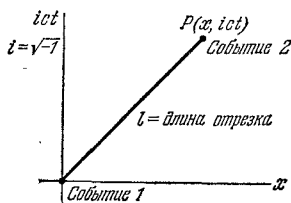


Рис. 11.37. Один из способов вывода формул преобразования Лоренца состоит в том, что по осям координат откладываются величины  $ict$  и  $x$ . При этом  $l^2 = x^2 - c^2 t^2$ . Следовательно,  $l^2 = -s^2$  является инвариантом относительно преобразования величин  $x', t'$  в  $x, t$  и обратно.

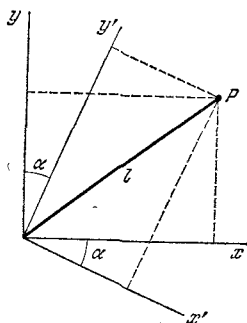


Рис. 11.38. В каких случаях расстояние между двумя точками является инвариантом при линейном преобразовании  $x, y \rightarrow x', y'$  для обычных координат? — Когда это преобразование представляет собой поворот осей координат!

Введем следующие координаты:

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z, \quad x_4 \equiv ict, \quad (56)$$

аналогичные декартовым координатам четырехмерного евклидова пространства. В формулах (56) и ниже  $i = (-1)^{1/2}$ . Расстояние от начала координат до некоторой точки равно

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (57)$$

При повороте вокруг оси  $x_3 \equiv z$  координаты определенной точки (или составляющие вектора) изменяются согласно уравнениям (46). Если мы выразим косинус и синус угла поворота в виде отношений длин сторон прямоугольного треугольника с катетами  $a, b$ , то уравнения (46) примут следующий вид:

$$x'_1 = \frac{ax_1 + bx_2}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad x'_2 = \frac{ax_2 - bx_1}{(a^2 + b^2)^{1/2}}. \quad (58)$$

Из уравнений (58) следует, что  $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ,

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 = \frac{(a^2 + b^2)(x_1)^2 + (a^2 + b^2)x_2^2}{(a^2 + b^2)} = (x_1)^2 + (x_2)^2. \quad (59)$$

Но это остается формально верным, если заменить  $b$  на  $ib$ , а  $b^2$  на  $-b^2$ . Действительно, преобразование Лоренца (9) можно написать в следующем виде:

$$x'_1 = \frac{ax_1 + ibx_4}{(a^2 - b^2)^{1/2}}, \quad x'_4 = \frac{ax_4 - ibx_1}{(a^2 - b^2)^{1/2}}. \quad (60)$$

За исключением множителя  $i$  перед  $b$ , это похоже на обычный поворот осей координат (46). В этом смысле преобразование Лоренца представляет собой преобразование поворота в пространстве — времени.

Отрезок, идущий из начала координат  $O$  в точку  $P(x, y)$ , определяет вектор: если совершается поворот системы координат, то координаты конечной точки вектора изменяются таким образом, что положение этого вектора  $\vec{OP}$  в пространстве остается неизменным. Подобно этому мы определяем вектор, подвергающийся преобразованию Лоренца, как совокупность четырех составляющих:  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ ,  $x_4 \equiv ict$ . Система этих четырех величин обычно называется *четырёхмерным вектором*. Точно так же любые четыре величины, которые преобразуются точно по такому же правилу, по определению образуют *четырёхмерный вектор*, инвариантные относительно преобразования Лоренца; так, если  $p_x, p_y, p_z$  — составляющие импульса материальной точки, а  $E$  — ее энергия, то четыре числа:  $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z, p_4 = iE/c$  — тоже образуют четырёхмерный вектор.

Производная вектора по скаляру представляет собой также вектор. Мы увидим в гл. 12, что для  $\mu$ -й составляющей импульса можно написать следующее уравнение:

$$p_\mu = M \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (61)$$

где  $\tau$  — инвариантное собственное время частицы. Бесконечно малый интервал собственного времени  $\Delta\tau$  связан с интервалом  $\Delta s$  соотношением  $(\Delta s)^2 = (c \Delta\tau)^2$ , так что уравнение (61) можно записать так:

$$p_\mu = Mc \frac{dx_\mu}{ds}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (62)$$

Понятие о четырёхмерном векторе, инвариантном относительно преобразования Лоренца, и соответствующая система обозначений весьма полезны в том смысле, что они позволяют нам, не задумываясь, писать уравнения, вид которых не зависит от какой-либо конкретной инерциальной системы отсчета. Эти уравнения автоматически согласуются с постулатом теории относительности, что основные физические законы одинаково формулируются во всех инерциальных системах отсчета. Для обычных векторов равенство  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  не зависит от системы координат. Выражая его через составляющие, мы получим  $a_i = b_i$  при  $i = 1, 2, 3$ . В другой системе координат, в которой составляющими вектора  $\mathbf{a}$  будут числа  $a'_i$ , а составляющими вектора  $\mathbf{b}$  — числа  $b'_i$ , все-таки выполняется равенство

$$a'_i = b'_i.$$

Мы всегда можем образовать скалярные инварианты:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i a_i = \sum_{i=1}^3 a'_i a'_i \quad (63)$$

или

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a'_i b'_i. \quad (64)$$

Подобным же образом можно написать следующее уравнение для составляющих четырёхмерных векторов:

$$p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)} + p_\mu^{(4)}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (65)$$

Это уравнение выражает законы сохранения релятивистского импульса и массы — энергии для реакции, в результате которой из частиц 1 и 2 образуются частицы 3 и 4. Уравнение (65) выполняется для всех четырех значений  $\mu$  и во всех инерциальных системах отсчета, т. е. фактически это система четырех уравнений. Абсолютная



величина четырехмерного вектора является инвариантом преобразования Лоренца:

$$\sum_{\mu=1}^4 p_{\mu} p_{\mu} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \frac{E^2}{c^2} = -(Mc)^2. \quad (66)$$

Это соотношение выводится в гл. 12. Подобно ему, величины

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} x_{\mu} = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = -s^2, \quad (67)$$

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} p_{\mu} = xp_x + yp_y + zp_z - tE \quad (68)$$

также представляют собой скалярные инварианты.

Сумма двух или большего числа четырехмерных векторов также является четырехмерным вектором:  $P_{\mu} = p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)}$ ;  $P_{\mu}$  — это вектор, так что из уравнения (66) можно вывести другой скалярный инвариант, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 P_{\mu} P_{\mu} &= \sum_{\mu=1}^4 (p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)})^2 = (\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)})^2 - \frac{1}{c^2} (E^{(1)} + E^{(2)})^2 = \\ &= 2 \left\{ \mathbf{p}^{(1)} \cdot \mathbf{p}^{(2)} - \frac{E^{(1)} E^{(2)}}{c^2} \right\} - (M^{(1)}c)^2 - (M^{(2)}c)^2. \end{aligned} \quad (69)$$

В гл. 12 мы получим уравнения (65) и (69), не ссылаясь на понятия четырехмерного вектора и пространства — времени. Однако, познакомившись с этими понятиями, мы овладели еще одним приемом теоретического анализа и получили простой и изящный метод составления уравнений, инвариантных относительно преобразования Лоренца. Этот метод открывает возможность для дальнейших обобщений, ведущих к более абстрактным и математически усложненным теориям — релятивистской квантовой теории и общей теории относительности Эйнштейна. Возможность составлять уравнения, инвариантные относительно преобразования Лоренца, не доказывая в каждом отдельном случае их инвариантность, позволяет физикам рассматривать еще более сложные проблемы, которые не могли бы быть решены иным путем.

Преобразование Лоренца соответствует поворотам системы координат в пространстве — времени. В специальной теории относительности доказываемся инвариантность физических законов только относительно этого типа преобразований. Обычная векторная алгебра дает нам систему обозначений, не зависящую от какой-либо конкретной системы координат в обычном трехмерном пространстве. Значение открытия Эйнштейна состоит в обобщении собственно преобразования Лоренца и простой геометрии четырехмерного пространства — времени. В общей теории относительности Эйнштейн доказал возможность выразить физические законы в форме, независимой от любых преобразований в пространстве — времени, а не только преобразований перехода от одной неускоренной системы отсчета к другой. При этом четырехмерное пространство — время уже не является пространством с евклидовой геометрией — наоборот, оно может обладать кривизной.

**Из истории физики. Одновременность в специальной теории относительности**

Мы приводим начало первой статьи Эйнштейна по специальной теории относительности. Особенно важное значение имеет содержащееся в ней обсуждение понятия одновременности.