ГЛАВА 12

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА. ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ

Радикальное изменение в наших представлениях о пространстве и времени, выраженное в преобразовании Лоренца, оказывает глубокое влияние на всю физику. Нам необходимо теперь пересмотреть физические законы, установленные и экспериментально подтвержденные для малых скоростей ($v \ll c$), с точки зрения согласования их с теорией относительности. При этом не следует удивляться, если окажется, что в какой-либо новой области потребуется изменение законов. В данном случае законы преобразуются к такому виду, что при достаточно малых скоростях они вновь принимают простые ньютоновские формы, точно оправдывающиеся, как показывает опыт, при предельно низких скоростях.

Как и в гл. 3, мы будем признавать только такие законы, которые тождественны во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга без ускорения. Однако вместо преобразования Галилея мы теперь будем руководствоваться преобразованием Лоренца для выяснения изменений, которые требуется внести в ту или иную физическую формулу при переходе от одной системы отсчета к другой. При $v/c \to 0$ преобразование Лоренца превращается в преобразование Галилея. Вместо требования инвариантности физических законов относительно преобразования Галилея мы теперь будем требовать их инвариантности относительно преобразования Лоренца.

Предположим, что физические закономерности устанавливаются двумя наблюдателями, находящимися в системах отсчета $S$ и $S'$. При этом каждый пользуется значениями длин, промежутков времени, скоростей и ускорений, измеренными в его собственной системе. Для переменных системы $S$ и переменных системы $S'$ форма закономерностей должна быть одинаковой. Например, если мы пользуемся преобразованием Лоренца для перехода от координат $x$, $y$, $z$ системы $S$ к координатам $x'$, $y'$, $z'$ системы $S'$, каждая физическая закономерность, выведенная в системе $S$, должна быть переведена на язык системы $S'$ с сохранением своей формы. Смысл этого утверждения станет ясным при рассмотрении конкретных задач.

## 12.1. Сохранение импульса (количества движения)

Требуется найти такое выражение для импульса движения **p**, чтобы оно принимало вид $M\mathbf{v}$ (где $M$ — масса покоя *)) при $v/c \ll 1$ и удовлетворяло закону сохранения импульса при соударениях частиц при любых величинах их скоростей относительно системы отсчета. Мы найдем это выражение, рассмотрев определенный случай соударения. Сначала покажем на конкретном примере,

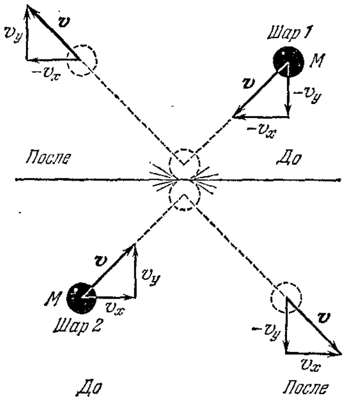


Рис. 12.1. Столкновение двух шаров с массами $M$, происходящее в плоскости $xy$. Показаны проекции скоростей на направление $y$ до и после столкновения.

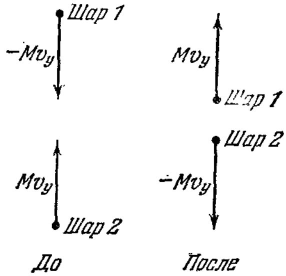


Рис. 12.2. Проекции импульсов соударяющихся шаров на направление $y$. *Полный* импульс по направлению $y$ равен нулю до и после соударения.

что ньютоновский (нерелятивистский) импульс $M\mathbf{v}$ не сохраняется при столкновениях, в которых участвуют частицы с релятивистскими скоростями.

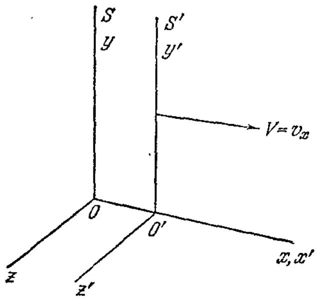


Рис 12.3. Соударение было рассмотрено в системе отсчета $S$ (см. рис. 12.1 и 12.2). Рассмотрим его теперь в системе $S'$, имеющей скорость $V=v_x$ относительно системы $S$, как показано на рисунке

Рассмотрим прилагаемые схемы, иллюстрирующие столкновение между частицами (шарами) с равными массами (рис. 12.1). Выберем такую систему отсчета $S$, чтобы частицы сближались с равнопротивоположными скоростями; тогда, если составляющая скорости первой частицы по оси $y$ до столкновения была $-v_y$, то после столкновения она становится равной $+v_y$.

В данной системе отсчета центр масс покоится. Вследствие симметрии составляющая полного импульса по оси $y$ должна быть равна нулю как до, так и после столкновения (рис. 12.2). Это будет справедливо независимо от выражения импульса при условии, что он получает равные знаки при противоположных знаках $v_y$. Таким образом, ньютоновское

*) Масса покоя определяется как инертная масса в нерелятивистском случае ($v/c \ll 1$).

выражение $\mathbf{p}=M\mathbf{v}$, даже если оно, вообще говоря, ошибочно, не проявляет в данном случае своей несостоятельности: приращение составляющей $p_y$ частицы 1 равно $+2Mv_y$, а для частицы 2 оно равно $-2Mv_y$, так что полное приращение проекции ньютоновского импульса на ось $y$ равно нулю.

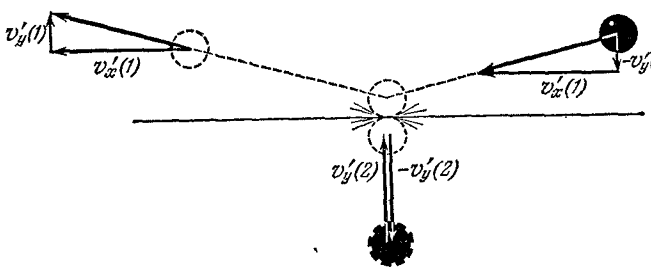


Рис. 12.4 В системе $S'$ находим:

$$v'_x(1)=-\frac{2V}{1+V^2/c^2},\quad v'_x(2)=0,\quad v'_y(1)=\frac{v_y}{1+V^2/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

$$v'_y(2)=\frac{v_y}{(1-V^2/c^2)^{1/2}}>v'_y(1).$$

(См. уравнение (11.24).)

Система отсчета $S'$ (рис. 12.3, 12.4) движется со скоростью $\mathbf{V}=v_x\hat{\mathbf{x}}$ относительно системы $S$; здесь $v_x$ обозначает проекцию на направление $x$ скорости частицы (шара) 2 до столкновения. Из уравнения релятивистского сложения скоростей (11.20г) мы знаем, что если с точки зрения наблюдателя, находящегося в покое относительно системы $S$, скорость равна $v_y$, то с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно системы $S'$, она будет равна

$$v'_y=\frac{v_y}{1-v_x V/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

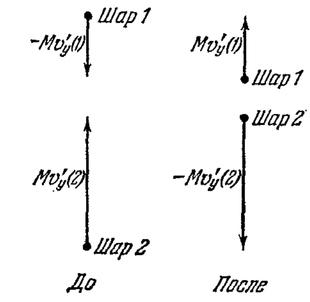


Рис. 12.5. В новой системе $S'$ нерелятивистский импульс в направлении $y'$ до и после столкновения *неодинаков*. Имеет место изменение суммарной составляющей по $y$ нерелятивистского импульса

Из этого выражения следует, что в системе $S'$ составляющие скоростей частиц 1 и 2 по оси $y$ не равны друг другу, хотя в системе $S$ они были равны (рис. 12.5). Действительно, из (1) видно, что при $V=v_x$ (где $v_x$ относится к частице 2) начальные составляющие скоростей частиц, измеряемые в системе $S'$, определяются равенствами

$$-v'_y(1)=-\frac{v_y}{1+v_x^2/c^2}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{1/2}, \qquad (2)$$

$$v'_y(2)=\frac{v_y}{1-v_x^2/c^2}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{1/2}. \qquad (3)$$

Эти составляющие скоростей не равны друг другу. Поскольку же составляющие скоростей частиц 1 и 2 по $x$ в системе $S$ тоже не равны друг другу (они равнопротивоположны), из уравнения (1) следует, что составляющие скоростей по $y$ различны с точки зрения наблюдателя, связанного с любой системой, движущейся относительно системы $S$ по направлению $x$. Таким образом, приращение количества движения $2Mv'_y(2)$ не равно по абсолютной величине приращению количества движения $2Mv'_y(1)$. Мы видим, что выражение, в котором импульс пропорционален скорости, не может обеспечить сохранения импульса во всех системах отсчета. Отсюда следует, что либо сохранение импульса несовместимо с преобразованием Лоренца, либо должно существовать другое определение импульса, по которому сохранение импульса оправдывается во всех системах, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями.

Будем искать выражение импульса, которое было бы инвариантно относительно преобразования Лоренца. Это выражение должно быть таким, чтобы составляющая импульса частицы по оси $y$ не зависела от составляющей по оси $x$ скорости системы отсчета, в которой наблюдается соударение. Если такое выражение будет найдено, то сохранение проекции импульса на ось $y$ в одной системе отсчета будет обеспечивать ее сохранение во всех системах отсчета. Мы уже знаем, что относительно преобразования Лоренца смещение $\Delta y$ в направлении $y$ одинаково во всех системах отсчета. Однако время $\Delta t$, затрачиваемое на прохождение расстояния $\Delta y$, зависит от системы отсчета, и, следовательно, составляющая скорости $v_y = \Delta y/\Delta t$ тоже зависит от системы отсчета. Для измерения промежутка времени $\Delta t$ можно воспользоваться, вместо лабораторных часов, воображаемыми часами, расположенными на частице. Эти последние будут измерять собственное время частицы $\Delta\tau$. *Это время должно быть признано всеми наблюдателями.* Таким образом, величина $\Delta y/\Delta\tau$ одинакова для всех систем отсчета.

Как нам уже известно, промежутки времени $\Delta t$ и $\Delta\tau$ отличаются на релятивистский множитель, приведенный в уравнении (11.31), согласно которому имеем

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\,. \tag{5}$$

Из (5) следует, что составляющая по $y$ вектора $\mathbf{v}/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ одинакова во всех системах отсчета, различающихся только составляющей их скорости по $x$. Если мы теперь *назовем* релятивистским импульсом вектор

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv \frac{M\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}}\,, \tag{6}$$

то сохранение его проекции на направление $y$ будет соблюдаться в любой инерциальной системе отсчета, отличающейся от системы с покоящимся в ней наблюдателем только величиной постоянной скорости в направлении $x$ (рис. 12.6). Отметим, что выражение (6) может быть переписано в виде

$$p = Mc\beta\gamma, \qquad (7)$$

если воспользоваться обозначениями $\beta = v/c$ и $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, принятыми в гл. 11.

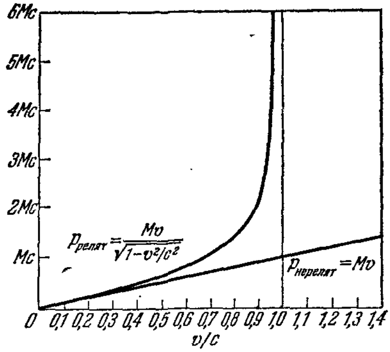


Рис. 12.6. Для того чтобы сохранение импульса соблюдалось во всех системах отсчета, принимаем следующее новое определение импульса $\mathbf{p}$: для частицы, имеющей скорость $\mathbf{v}$ и массу покоя $M$, импульсом назовем величину

$$\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

График показывает зависимость как релятивистского, так и нерелятивистского импульса от $v/c$.

В рассмотренном выше примере соударения для удобства мы расположили оси координат симметричным образом, с таким расчетом, чтобы составляющая скорости по оси $x$ ни у одной из частиц не претерпела изменения. Тогда, согласно (6), $p_x$ сохраняется автоматически. Таким образом, при столкновении двух одинаковых частиц обеспечивается сохранение полного релятивистского импульса, определяемого выражением (6). При $v/c \ll 1$ определение понятия импульса (6) совпадает с нерелятивистским: $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$. То обстоятельство, что импульс, определяемый выражением (6), сохраняется во всех процессах столкновений, является непреложным экспериментальным фактом.

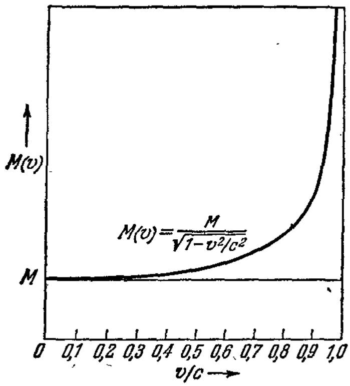


Рис. 12.7. Новая формула, определяющая импульс, приводит к следующей зависимости массы от скорости:

$$M(v) = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Релятивистский импульс может быть представлен в виде

$$\mathbf{p} = M(v)\,\mathbf{v}, \qquad (8)$$

так что величина

$$M(v) \equiv \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = M\gamma \qquad (9)$$

может рассматриваться как релятивистская масса частицы с массой покоя $M$ при ее движении относительно наблюдателя со скоростью $v$ (рис. 12.7). Масса покоя есть масса при $v \to 0$. При $v \to c$ $M(v)/M \to \infty$. Релятивистское возрастание массы со скоростью проверено в разнообразных опытах по отклонению электронов; косвенным образом оно проверяется также при работе ускорителей частиц весьма высоких энергий. Вместо уравнения (9) ниже будет приведено другое уравнение, подчеркивающее непосредственную связь между релятивистской энергией и импульсом, которое во многих случаях проще применять.

### 12.2. Релятивистское выражение энергии

Сначала подойдем к релятивистскому выражению энергии формальным путем. Из уравнения (7) получаем выражение квадрата релятивистского импульса в виде

$$p^2 = M^2c^2\beta^2\gamma^2. \tag{10}$$

С другой стороны, тождество

$$\frac{1}{1-v^2/c^2}-\frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}=1, \tag{11}$$

или

$$\gamma^2-\beta^2\gamma^2=1, \tag{11a}$$

дает готовый инвариант относительно преобразования Лоренца, поскольку единица есть постоянная величина. Умножая обе части равенства (11a) на $M^2c^4$, получим

$$M^2c^4(\gamma^2-\beta^2\gamma^2)=M^2c^4, \tag{12}$$

или, используя (10),

$$M^2c^4\gamma^2-p^2c^2=M^2c^4. \tag{12a}$$

Поскольку масса покоя постоянна, величина $M^2c^4$ также постоянна и, следовательно, является инвариантом относительно преобразования Лоренца. Но что за физическую величину выражает произведение $M^2c^4\gamma^2$? Его роль в (12a) ясно показывает, что это — важная физическая величина, так как при вычитании из нее величины $p^2c^2$ получается число $M^2c^4$, являющееся инвариантом относительно преобразования Лоренца.

Рассмотрим величину

$$Mc^2\gamma = Mc^2\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

При $\beta\ll 1$ эта величина принимает вид

$$Mc^2\gamma \cong Mc^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\ldots\right)\cong Mc^2+\frac{1}{2}Mv^2+\ldots \tag{14}$$

Член $^1/_2Mv^2$ известен как кинетическая энергия $K$ в нерелятивистском пределе. Предположим, что мы определили полную релятивистскую энергию $E$ свободной частицы тождеством

$$\boxed{E\equiv Mc^2\gamma\equiv\frac{Mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}.} \tag{15}$$