стиц весьма высоких энергий. Вместо уравнения (9) ниже будет приведено другое уравнение, подчеркивающее непосредственную связь между релятивистской энергией и импульсом, которое во многих случаях проще применять.

12.2. Релятивистское выражение энергии

Сначала подойдем к релятивистскому выражению энергии формальным путем. Из уравнения (7) получаем выражение квадрата релятивистского импульса в виде

$$p^2 = M^2c^2\beta^2\gamma^2. \tag{10}$$

С другой стороны, тождество

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1, \tag{11}$$

или

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1, \tag{11a}$$

дает готовый инвариант относительно преобразования Лоренца, поскольку единица есть постоянная величина. Умножая обе части равенства (11a) на M^2c^4, получим

$$M^2c^4(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = M^2c^4, \tag{12}$$

или, используя (10),

$$M^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = M^2c^4. \tag{12a}$$

Поскольку масса покоя постоянна, величина M^2c^4 также постоянна и, следовательно, является инвариантом относительно преобразования Лоренца. Но что за физическую величину выражает произведение $M^2c^4\gamma^2$? Его роль в (12a) ясно показывает, что это — важная физическая величина, так как при вычитании из нее величины p^2c^2 получается число M^2c^4, являющееся инвариантом относительно преобразования Лоренца.

Рассмотрим величину

$$Mc^2\gamma = Mc^2\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

При $\beta \ll 1$ эта величина принимает вид

$$Mc^2\gamma \cong Mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots\right) \cong Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \ldots \tag{14}$$

Член $^1/_2Mv^2$ известен как кинетическая энергия K в нерелятивистском пределе. Предположим, что мы определили полную релятивистскую энергию E свободной частицы тождеством

$$\boxed{E \equiv Mc^2\gamma \equiv \frac{Mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}.} \tag{15}$$

Тогда из (12а) получаем

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = M^2c^4,} \tag{16}$$

что является инвариантом относительно преобразования Лоренца. При переходе от одной системы отсчета к другой при $p \to p'$ и $E \to E'$ инвариантность выражения (16) означает, что

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 = M^2c^4. \tag{17}$$

Мы имеем в виду именно это, утверждая, что выражение (16) инвариантно относительно преобразования Лоренца. Еще раз подчеркиваем, что M выражает массу покоя частицы и является числом, также инвариантным относительно преобразования Лоренца.

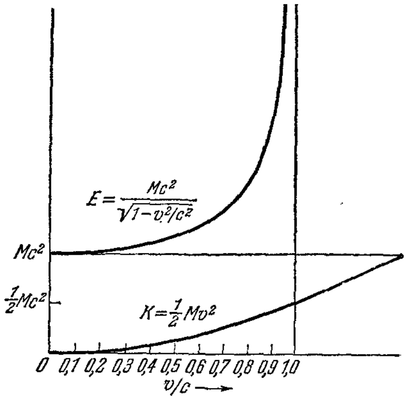

Рис. 12.8. Релятивистская энергия $E = Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ и нерелятивистская кинетическая энергия $K = \frac{1}{2}Mv^2$ как функции приведенной скорости v/c. При $v/c \ll 1$ графики E и K имеют почти одинаковый вид, так как в этой области $Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2} \approx Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2$. Но при $v/c \sim 1$ энергия E растет гораздо быстрее, чем K.

12.3. Преобразование импульса и энергии

Из уравнений (4) и (6) следует, что

$$p_x = M\frac{dx}{d\tau}, \qquad p_y = M\frac{dy}{d\tau},$$
$$p_z = M\frac{dz}{d\tau}. \tag{18}$$

С другой стороны, как это следует из уравнений (4) и (15), E может быть представлено в виде

$$E = Mc^2\frac{dt}{d\tau}, \tag{19}$$

где $dt/d\tau = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Поскольку же M и τ инвариантны относительно преобразования Лоренца, из уравнений (18) и (19) можно заключить, что p_x, p_y, p_z и E/c^2 преобразуются по Лоренцу совершенно так же, как соответственно x, y, z и t. Зная преобразование этих последних четырех величин, мы легко получаем соотношения (20). Таким образом, используя преобразования, приведенные в гл. 11, мы приходим к формулам преобразования импульса и энергии:

$$\boxed{\begin{gathered} p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \\ E' = \gamma(E - p_x c\beta). \end{gathered}} \tag{20}$$