Тогда из (12а) получаем

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = M^2c^4,} \tag{16}$$

что является инвариантом относительно преобразования Лоренца. При переходе от одной системы отсчета к другой при $p \to p'$ и $E \to E'$ инвариантность выражения (16) означает, что

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 = M^2c^4. \tag{17}$$

Мы имеем в виду именно это, утверждая, что выражение (16) инвариантно относительно преобразования Лоренца. Еще раз подчеркиваем, что M выражает массу покоя частицы и является числом, также инвариантным относительно преобразования Лоренца.

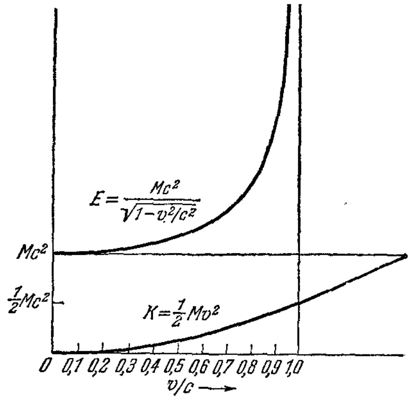

Рис. 12.8. Релятивистская энергия $E = Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ и нерелятивистская кинетическая энергия $K = \frac{1}{2}Mv^2$ как функции приведенной скорости v/c При $v/c \ll 1$ графики E и K имеют почти одинаковый вид, так как в этой области $Mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2} \approx Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2$. Но при $v/c \sim 1$ энергия E растет гораздо быстрее, чем K.

12.3. Преобразование импульса и энергии

Из уравнений (4) и (6) следует, что

$$p_x = M\frac{dx}{d\tau}, \quad p_y = M\frac{dy}{d\tau}, \quad p_z = M\frac{dz}{d\tau}. \tag{18}$$

С другой стороны, как это следует из уравнений (4) и (15), E может быть представлено в виде

$$E = Mc^2\frac{dt}{d\tau}, \tag{19}$$

где $dt/d\tau = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Поскольку же M и τ инвариантны относительно преобразования Лоренца, из уравнений (18) и (19) можно заключить, что p_x, p_y, p_z и E/c^2 преобразуются по Лоренцу совершенно так же, как соответственно x, y, z и t. Зная преобразование этих последних четырех величин, мы легко получаем соотношения (20). Таким образом, используя преобразования, приведенные в гл. 11, мы приходим к формулам преобразования импульса и энергии:

$$\boxed{\begin{gathered} p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \\ E' = \gamma(E - p_x c\beta). \end{gathered}} \tag{20}$$

Обратные преобразования получаются при замене $-\beta$ на $+\beta$ и обмене местами между соответственными символами со штрихом и без штриха:

$$\boxed{\begin{gathered} p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\beta E}{c}\right), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \\ E = \gamma\,(E' + p'_x c\beta). \end{gathered}} \tag{20a}$$

Уравнения (18) и (19) позволяют связать скорость частицы с ее импульсом и энергией:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{p_x}{M}\frac{Mc^2}{E} = \frac{c^2 p_x}{E}, \tag{21}$$

или

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{v}\,\frac{E}{c^2}\,.} \tag{21a}$$

П р и м е р. *Неупругое столкновение.* Предположим, что две одинаковые частицы сталкиваются и слипаются, образуя новую, составную частицу. В системе отсчета S, относительно которой центр масс находится в покое, имеем (по определению центра масс)

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \tag{22}$$

Образовавшаяся составная частица должна находиться в покое. В другой системе отсчета S' будем иметь

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3. \tag{23}$$

Пользуясь преобразованием (20), можно выразить члены уравнения (23) через соответствующие величины, наблюдаемые в системе S:

$$p'_{x1} + p'_{x2} = \gamma\,(p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma\beta\,(E_1 + E_2)}{c} = p'_{x3} = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma\beta E_3}{c}\,. \tag{24}$$

Здесь E_1 и E_2— энергии исходных частиц с точки зрения наблюдателя в системе S, а E_3— энергия образовавшейся частицы с его же точки зрения. Но $p_{x3}=0$ и $p_{x1}+p_{x2}=0$, так что уравнение (24) приводится к виду

$$E_3 = E_1 + E_2. \tag{25}$$

Этот результат свидетельствует о сохранении релятивистской энергии при столкновении. Приведенное рассуждение должно напомнить читателю ход рассуждения о сохранении импульса и энергии в гл. 3.

Далее, поскольку частицы одинаковы, $E_1=E_2$; воспользовавшись уравнением (15) для E_1 и E_2, измеренных в системе S, получаем

$$M_3c^2 = \frac{2Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\,. \tag{26}$$

Здесь M_3— масса покоя образовавшейся составной частицы, а v — начальная скорость частицы 1 или 2 относительно системы S. В этом примере масса покоя M_3 образовавшейся частицы больше суммы $2M$ масс покоя исходных частиц. Кинетическая энергия исходных частиц претерпела превращение, в результате которого масса покоя образовавшейся частицы превысила исходную массу покоя.

При рассмотрении самого общего случая соударения оказывается, что для сохранения импульса необходимо, чтобы сумма

$$\sum_i \frac{M_i c^2}{(1-v_i^2/c^2)^{1/2}} = \sum_i E_i, \tag{26a}$$

распространенная на все вступающие в столкновение частицы, была равна такой же сумме, распространенной на все частицы, выходящие из столкновения *). Таким примером уже служило уравнение (26). Иными словами, при релятивистском столкновении импульс сохраняется только в тех случаях, когда у взаимодействующих тел сохраняется суммарная релятивистская энергия.

Новая масса покоя M_3 превышает исходную сумму $2M$ масс покоя. При $\beta \ll 1$ этот прирост можно частично объяснить, исходя из нерелятивистских представлений. Поскольку

$$\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots, \tag{27}$$

из (26) следует, что

$$M_3 \cong 2\left(M + \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} + \ldots\right) \cong 2\left(M + \frac{\text{кинетическая энергия}}{c^2}\right). \tag{28}$$

Таким образом, масса покоя M_3 включает в себя не только сумму масс покоя вступающих во взаимодействие частиц, но также и добавок, пропорциональный их кинетической энергии. В рассмотренном примере неупругого соударения уравнение (28) показывает, что имело место превращение массы, эквивалентной кинетической энергии, в массу покоя. (Уравнение (28) было нами написано для случая малых значений β только с той целью, чтобы сделать более наглядным превращение массы и энергии. Это превращение имеет место и при высоких значениях β.) Из уравнения (28) вытекает соотношение между приращением массы покоя

$$\Delta M = M_3 - 2M \tag{29}$$

и потерей кинетической энергии:

$$\text{потерянная кинетическая энергия} = c^2 \Delta M. \tag{30}$$

---

*) Выражение (26a) не может непосредственно применяться к столкновениям с участием фотонов, так как для этих последних $v=c$. Ниже, в уравнениях (54) и (55), будет показано, каким образом можно подходить к задачам, связанным с фотонами и другими частицами, лишенными массы покоя.