12.4. Взаимосвязь массы и энергии

Взаимосвязь между превращениями массы и энергии (и количественное соотношение между их приращениями) рассматривалась Эйнштейном как самый значительный вывод теории относительности. Пока частицы не приобретают скоростей, соизмеримых с величиной c, можно пользоваться нерелятивистским выражением кинетической энергии, из которого следует, что при любом соударении между частицами (даже при неравенстве чисел вступающих и выходящих из взаимодействия частиц) всякая убыль (или приращение) суммарной массы покоя, умноженная на c^2, равна приращению (или убыли) суммарной кинетической энергии. И наоборот, при неупругом соударении, сопровождающемся убылью кинетической энергии, должно иметь место приращение суммарной массы покоя выходящих из взаимодействия частиц.

Из (9) и (15) следует выражение $E=M(v)c^2$. Таким образом, естественное определение энергии в теории относительности таково, что утверждение (30) в точности соблюдается для полного приращения энергии, без ограничения в виде требования, чтобы $v/c \ll 1$:

$$\Delta E = \Delta M c^2. \tag{31}$$

(Точный вывод этого выражения приведен в исторической справке в конце гл. 12.) Приращение массы покоя ΔM, связанное с превращением эквивалента кинетической энергии в массу покоя, в повседневных процессах обычно весьма мало, так как c несоизмеримо велико по сравнению с обычными скоростями.

Поскольку масса однозначно связана с энергией, система с полной релятивистской энергией E неотделима от инертной массы $M=E/c^2$. Рассмотрим ящик, лишенный массы и содержащий N покоящихся в нем частиц. При попытках придать ему ускорение ящик обнаруживает инертную массу NM. Имея скорость $\mathbf{V}$, ящик обладает импульсом $NM\mathbf{V}$. Однако если каждая частица обладает в системе отсчета ящика скоростью $\mathbf{v}$ и кинетической энергией $\frac{1}{2}Mv^2$, то инертная масса ящика становится равной $N(M+Mv^2/2c^2)$, а импульс равен $N\mathbf{V}(M+Mv^2/2c^2)$. Последние два выражения верны, если скорости V и v несоизмеримо малы по сравнению с c.

Аналогичным образом, сжатая пружина имеет бо́льшую массу, чем несжатая, на величину затраченной на ее сжатие работы, деленной на c^2. После полного растворения сжатой пружины в кислоте суммарная масса продуктов реакции несколько (хотя и на неизмеримо малую величину) больше, чем при растворении ненапряженной пружины.

Примеры. *Совместные превращения массы и энергии.* а) При столкновении и слипании двух масс по 1 *г*, имеющих равнопротивоположные скорости по 10^5 *см/сек*, добавочная масса покоя слипшейся пары равна

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \cong 2 \cdot \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} \cong 1 \cdot 10^{-11}\ г. \tag{32}$$

Эта величина меньше ошибки, с которой может быть измерена масса в 1 *г*.

б) Атом водорода состоит из электрона, связанного с протоном; его масса покоя M_H меньше суммы масс покоя m (свободного электрона) и M_p (протона). Избыток масс этих свободных частиц равен энергии ионизации (энергии связи), деленной на c^2. Масса M_H атома H равна $1{,}67338 \cdot 10^{-24}$ *г*. Энергия связи электрона с протоном также известна: 13,6 *эв*, или $22 \cdot 10^{-12}$ *эрг*; таким образом,

$$M_p + m - M_H = \frac{22 \cdot 10^{-12}}{c^2} \cong 2{,}4 \cdot 10^{-32} \text{ г}, \tag{33}$$

что составляет 10^{-8} массы атома водорода. Это опять неизмеримо малая величина.

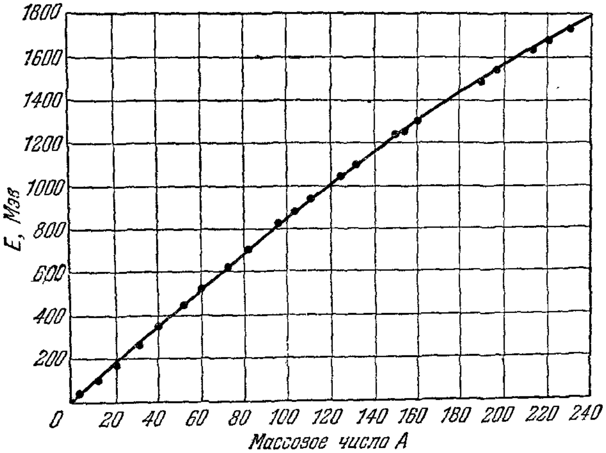

Рис. 12.9. Энергия связи ядер как функция массового числа A. Напомним, что энергия в 1 *Мэв* эквивалентна массе в $1{,}76 \cdot 10^{-27}$ *г*. На графике представлены не все ядра.

в) Сумма масс покоя протона и нейтрона равна

$$M_p + M_n = (1{,}6725 + 1{,}6748) \cdot 10^{-24} \text{ г} = 3{,}3473 \cdot 10^{-24} \text{ г}. \tag{34}$$

Энергия связи дейтрона относительно свободных протона и нейтрона составляет 2,226 *Мэв*, что равно

$$\frac{2{,}226}{0{,}511} mc^2 = 4{,}36\, mc^2, \tag{35}$$

где $m = 0{,}911 \cdot 10^{-27}$ *г* — масса покоя электрона. Экспериментально наблюдаемая масса дейтрона составляет $3{,}34334 \cdot 10^{-24}$ *г*, откуда

$$\Delta M = M_p + M_n - M_d = (3{,}3473 - 3{,}3433) \cdot 10^{-24} \text{ г} = 4{,}0 \cdot 10^{-27} \text{ г}, \tag{36}$$

или

$$\Delta M \cong 4{,}4\, m, \qquad \Delta M c^2 = 4{,}4\, mc^2, \tag{37}$$

в удовлетворительном согласии со значением энергии связи, приведенным в (35). Результат выражен через массу электрона, чтобы дать более наглядное представление об участвующих здесь величинах. Приведенные здесь данные дают наиболее надежное значение массы нейтрона.

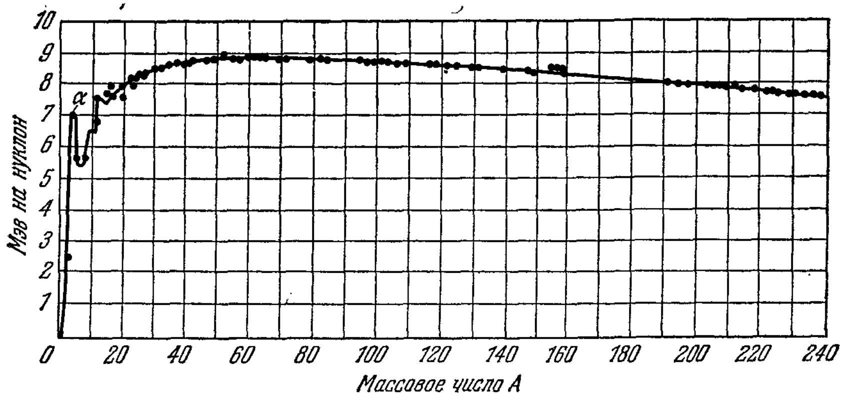

Рис. 12.10. Энергия связи на нуклон (в *Мэв* на нуклон) как функция массового числа A. Точка, помеченная буквой α, соответствует He^4, имеющему сравнительно высокую энергию связи.

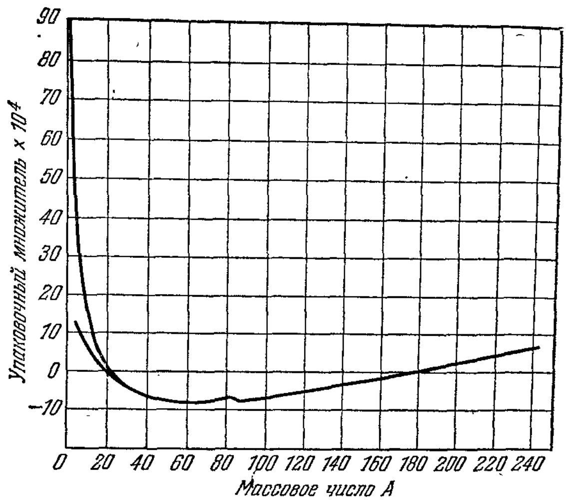

Рис. 12.11. График упаковочного множителя. Дефект массы Δ определяется как разность атомной массы изотопа M и его массового числа A: $\Delta = M - A$. Упаковочный множитель F определяется как $F = \frac{\Delta}{A} = \frac{M-A}{A}$

г) В прилагаемой таблице сопоставлены наблюденные значения выделяемой энергии ΔE и дефекта массы ΔM для некоторых ядерных реакций. Используется новая атомная единица массы, равная одной двенадцатой массы атома углерода C^{12}.

Сравнение вычисленных и наблюденных энергий расщепления *)

Реакции	Дефект массы и углеродных а. е. м.	Выделяемая энергия, *Мэв*	
		ΔMc^2	ΔE
$Be^9 + H^1 \longrightarrow Li^6 + He^4$	0,00242	2,25	2,28
$Li^6 + H^2 \longrightarrow He^4 + He^4$	0,02381	22,17	22,20
$B^{10} + H^2 \longrightarrow C^{11} + n^1$	0,00685	6,38	6,08
$N^{14} + H^2 \longrightarrow C^{12} + He^4$	0,01436	13,37	13,40
$N^{14} + He^4 \longrightarrow O^{17} + H^1$	—0,00124	—1,15	—1,16
$Si^{28} + He^4 \longrightarrow P^{31} + H^1$	—0,00242	—2,25	—2,23

*) S. Dushman, General Electric Review 47, 6—13 (Oct. 1944).

Пример. *Звездные реакции с превращениями энергии.* Важнейшим источником энергии Солнца и большинства звезд является ядерное сжигание протонов с образованием гелия (рис. 12.12).

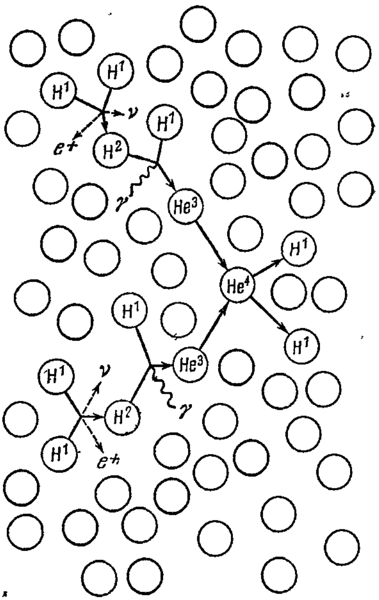

Рис. 12.12. Схема синтеза гелия из водорода по протонному циклу, происходящего в звездах с массой, не превышающей массы Солнца, в которых имеет место основная последовательность ядерных превращений. Плотность 10^2 *г/см*^{3}. Температура 10^7 °К. Итоговый результат: 4 ядра водорода → ядро гелия; выделенная энергия $= 10^7$ *кв-ч* на фунт ($2{,}2\cdot10^6$ *кв-ч/кг*) превращенного вещества (*по данным Фаулера*)

Выделение энергии в расчете на один образующийся атом гелия может быть вычислено из итогового изменения массы в реакции, которое равно

$$4M_p + 2m - M(He^4) = 4(1{,}6725\times10^{-24}) + 2(0{,}911\cdot10^{-27}) - 6{,}647\times10^{-24} \cong 0{,}045\cdot10^{-24}\ г \cong 50\,m, \quad (38)$$

где m — масса электрона. Результат, полученный в (38), эквивалентен $50\cdot0{,}511$ *Мэв*, или около 25 *Мэв*. Два электрона включены в реакцию для того, чтобы сбалансировать два электрона, принадлежащие атому гелия. Табличные атомные массы обычно включают суммарную массу нормального числа атомных электронов; использованная же нами масса протона M_p не включает в себя массы электрона.

В центре Солнца температура составляет $2\cdot10^7$ °К. Предполагается, что при этой температуре среди ядерных процессов преобладает следующая совокупность реакций:

$$H^1 + p = H^2 + e^+ + \text{нейтрино},$$
$$H^2 + p = He^3 + \gamma,$$
$$He^3 + He^3 = He^4 + 2H^1.$$

Итоговый результат заключается в сгорании водорода с образованием He^4. Следует отметить, что в первой стадии выделяется нейтрино (нейтральная частица, лишенная массы покоя), так что Солнце является мощным источником нейтрино. С веществом эти частицы взаимодействуют очень слабо; таким образом, почти все нейтрино, образуемые в звездных ядерных реакциях, вылетают в космическое пространство. Они способны переносить до 10% выделяемой Солнцем энергии.

Отличное изложение вопроса о происхождении элементов можно найти в статье: Willam A. Fowler, Proc. Nat. Acad. Sci. 52. 524—548 (1964).

12.5. Работа и энергия

Обратимся к другой, более привычной цепи рассуждений, приводящей к выражению (15) релятивистской энергии. В гл. 5 было показано, что быстрота, с которой сила **F** совершает работу по перемещению материальной точки, может быть выражена следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}. \tag{39}$$

В релятивистской области при этом имеем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{M\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{39a}$$

где M — постоянная масса покоя. Отсюда, будучи обобщено на релятивистскую область, уравнение (39) принимает вид

$$\frac{dW}{dt} = M\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{40}$$

Нетрудно показать, что $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = v\dot{v}$. При этом

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{\dot{\mathbf{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{\mathbf{v}(\dot{v}v/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right\} =$$
$$= \frac{1 - (v^2/c^2) + (v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} v\dot{v} = \frac{d}{dt} \frac{c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{41}$$

В приведенных выше выражениях используется обозначение $\dot{v} = dv/dt$. Таким образом, быстрота совершения работы по перемещению материальной точки получает следующее выражение:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{42}$$