12.7. Преобразование скорости изменения импульса

Скорость изменения импульса дается выражением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=M\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{60}$$

где M — масса покоя частицы. В другой системе отсчета мы имеем дело с

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}.$$

Постараемся избегать выражения «релятивистская сила» (так как $d\mathbf{p}/dt$ не ведет себя как часть 4-вектора *)). Предположим, что в некоторое мгновение частица находится в покое относительно системы S', движущейся со скоростью $v\hat{\mathbf{x}}$ относительно S. Из формул преобразования Лоренца для $\mathbf{p}$ и E известно, что

$$\Delta p_y=\Delta p_y' \quad \text{и} \quad \Delta p_z=\Delta p_z'. \tag{61}$$

Промежуток времени $\Delta t'$ в S' является собственным промежутком $\Delta\tau$:

$$\Delta t'=\Delta\tau=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\Delta t. \tag{62}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{\Delta p_y'}{\Delta t'}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{\Delta p_y'}{\Delta\tau}, \tag{63}$$

причем аналогичное выражение получается для $\Delta p_z/\Delta t$. Таким образом,

$$\boxed{\frac{dp_y}{dt}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{dp_y'}{d\tau}, \quad \frac{dp_z}{dt}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{dp_z'}{d\tau}.} \tag{64}$$

Составляющие по x преобразуются иначе. Как нам известно из (20а),

$$p_x=\frac{p_x'+vE'/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{65}$$

или

$$\Delta p_x=\frac{\Delta p_x'+v\,\Delta E'/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{66}$$

С другой стороны,

$$E'=(M^2c^4+p'^2c^2)^{1/2}, \tag{67}$$

*) Четырехмерный вектор. (*Прим. ред.*)

так что

$$\Delta E' = \frac{p'_x \Delta p'_x c^2}{(M^2c^4 + p'^2c^2)^{1/2}}. \tag{68}$$

Но по условию в системе S' в рассматриваемый момент времени $p'_x=0$; тогда (66) принимает вид

$$\Delta p_x \cong \frac{\Delta p'_x}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{69}$$

а с учетом (62)

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} \cong \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta \tau}. \tag{70}$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ имеем

$$\boxed{\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{d\tau}.} \tag{71}$$

Формулы преобразования (64) и (71) играют важную роль при изложении электромагнетизма в т. II настоящего курса.

12.8. Постоянство заряда

Закон $q\mathbf{E}=\dot{\mathbf{p}}$ движения частицы, несущей заряд q в электрическом поле $\mathbf{E}$, является неполным, пока мы не знаем зависимости заряда от скорости и ускорения частицы, имеющей импульс $\mathbf{p}$. Лучшим свидетельством весьма точного соблюдения постоянства заряда протона или электрона является тот экспериментальный факт, что пучки атомов и молекул водорода не испытывают отклонения в однородном электрическом поле, перпендикулярном к пучку. Атом водорода состоит из электрона (e) и протона (p). Молекула водорода состоит из двух электронов и двух протонов. Даже при очень медленном движении протонов электроны движутся вокруг них со средней скоростью около $10^{-2}c$. Неотклоняющаяся молекула имеет постоянный импульс, так что экспериментальный результат говорит о том, что $\dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{p}}+\dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{e}}=0=(e_{\mathrm{p}}+e_{\mathrm{e}})\mathbf{E}$. Таким образом, из экспериментов следует, что в атоме или молекуле $e_{\mathrm{e}}=-e_{\mathrm{p}}$, несмотря на то что только электроны обладают большой скоростью, которая притом различна в атомах и молекулах. Количественно заряд электрона оказывается независимым от скорости и равным заряду протона с точностью до $10^{-7}\%$ вплоть до скоростей электронов порядка $10^{-2}c$.

Экспериментальная сторона этого вопроса обсуждается в т. II. Экспериментальный результат заключается в том, что заряд не зависит от скорости частицы или наблюдателя. Таким образом, при переходе к другой системе отсчета заряд и масса преобразуются по-разному.