ГЛАВА 13

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

В гл. 4 рассматривался целый ряд задач, связанных с нерелятивистским движением частиц в электрическом и магнитном полях. В гл. 3 и затем в гл. 6 рассматривались упругое и неупругое соударения двух нерелятивистских частиц. Теперь мы распространим несколько прежних решений на релятивистскую область. Во многих случаях решения не представляют особых трудностей, но некоторые из них имеют чрезвычайно большое значение для физики частиц высоких энергий и для астрофизики.

То обстоятельство, что импульс ускоряемой релятивистской частицы может неограниченно возрастать даже при скоростях, близких к скорости света, лежит в основе работы больших ускорителей и анализа импульса, которым обладают частицы высоких энергий, что осуществляется с помощью отклоняющего магнитного поля. Отклонение частиц в магнитных полях широко используется в исследовании космических лучей и в исследовательских работах, посвященных частицам высоких энергий.

Пороговая энергия для реакции релятивистской частицы гораздо выше при наблюдении в лабораторной системе отсчета, чем в системе центра масс. Этот эффект является одним из главных факторов, сужающих границы исследования в физике элементарных частиц.

В целях приобретения навыков применения некоторых типичных приемов мы сначала рассмотрим отклонение релятивистской частицы в электрическом поле.

13.1. Ускорение заряженной частицы постоянным продольным электрическим полем

Уравнение движения частицы с зарядом q и массой покоя M в однородном постоянном электрическом поле *) $\mathscr{E}\hat{\mathbf{x}}$ имеет вид

$$\dot{p}\hat{\mathbf{x}} = q\mathscr{E}\hat{\mathbf{x}} \qquad (1)$$

*) Напряженность электрического поля мы обозначаем здесь символом $\mathscr{E}$, чтобы избежать путаницы с энергией E.

или, при $\mathbf{p}=M\mathbf{v}/(1-v^2/c^2)^{1/2}$,

$$M\frac{d}{dt}\frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}=q\mathscr{E}, \tag{2}$$

если мы примем $v_y=v_z=0$, что необходимо при ускорении в направлении x из состояния покоя. Интегрируя (2) по времени, мы сразу получаем

$$M\frac{v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}=q\mathscr{E}t \tag{3}$$

при $v(0)=0$. После возведения в квадрат обеих частей равенства и перестановок находим

$$v^2=\frac{(q\mathscr{E}t/Mc)^2}{1+(q\mathscr{E}t/Mc)^2}c^2. \tag{4}$$

Для коротких промежутков времени *), удовлетворяющих неравенству $t<Mc/q\mathscr{E}$, знаменатель в (4) можно заменить единицей; тогда

$$v^2\cong\left(\frac{q\mathscr{E}}{M}t\right)^2, \tag{5}$$

что полностью совпадает с нерелятивистским приближением, рассмотренным в гл. 4.

Для больших промежутков времени, удовлетворяющих неравенству $t\gg Mc/q\mathscr{E}$, имеем релятивистское приближение

$$v^2\cong\left[1-\left(\frac{Mc}{q\mathscr{E}t}\right)^2\right]c^2, \tag{6}$$

которое показывает, каким образом v приближается к величине c, играющей роль предельной скорости. При больших промежутках времени получаем из (6)

$$\frac{v^2}{c^2}\cong1-\left(\frac{Mc}{q\mathscr{E}t}\right)^2, \tag{7}$$

что при обозначении $\beta\equiv v/c$ дает

$$\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}\cong\frac{q\mathscr{E}t}{Mc}. \tag{8}$$

Как следует из гл. 12 и уравнения (8), релятивистское выражение энергии при $t\gg Mc/q\mathscr{E}$ принимает вид

$$E=\frac{Mc^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\approx q\mathscr{E}ct. \tag{9}$$

Этот результат есть не что иное, как произведение силы на путь,

*) При $\mathscr{E}=1$ ед. СГСЭ$_V$/*см* имеем для электрона

$$\frac{mc}{e\mathscr{E}}\approx\frac{(10^{-27})(3\cdot10^{10})}{(5\cdot10^{-10})}\text{ сек}\approx10^{-7}\text{ сек.}$$

пройденный за время t при скорости c. В этом же случае больших времен для количества движения получаем

$$p \approx \frac{Mc}{(1-\beta^2)^{1/2}} \approx q\mathscr{E}t. \tag{10}$$

Отметим характерную релятивистскую особенность: импульс может

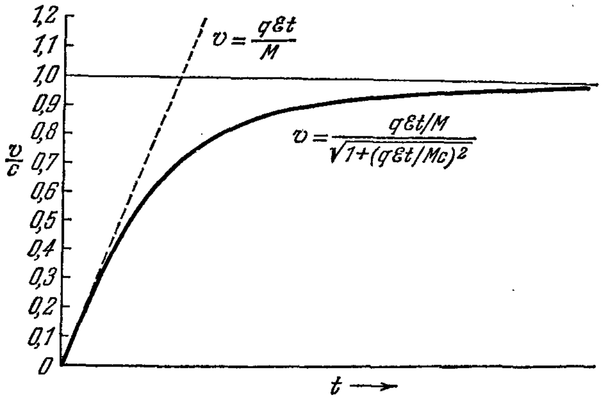

Рис 13.1. Скорость v заряда q, связанного с массой покоя M и ускоренного из состояния покоя электрическим полем напряженностью $\mathscr{E}$, изображена как функция времени. При $t \gg 0$ скорость v стремится к пределу c. Штриховая линия показывает ход изменения скорости заряда со временем по предсказаниям нерелятивистской механики.

продолжать возрастать со временем, даже когда скорость практически установилась.

Смещение x может быть найдено после извлечения квадратного корня из (4). Тогда, обозначив v через dx/dt и $q\mathscr{E}/Mc$ через s, имеем

$$dx = \frac{cst}{(1+s^2t^2)^{1/2}}\, dt. \tag{11}$$

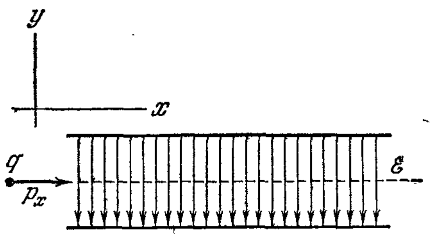

Рис. 13.2. Заряд q с начальным импульсом p_x входит в поперечное поле $\mathscr{E}$.

Интегрируя в пределах от 0 до t, получаем смещение:

$$x = \frac{Mc^2}{q\mathscr{E}}\left\{\left[1+\left(\frac{q\mathscr{E}t}{Mc}\right)^2\right]^{1/2}-1\right\}. \tag{12}$$

(Читателю предлагается самому проверить алгебраические преобразования.) Мы исходили из того, что $x(0)=0$ и $v(0)=0$. При больших временах $x \approx ct$, т. е. частица движется почти со скоростью света.

Пример. *Ускорение поперечным электрическим полем.* Рассмотрим заряженную частицу, двигавшуюся вдоль оси x с большим импульсом p_0 и затем вошедшую в область длиной L, в которой имеется поперечное электрическое поле $\mathscr{E}\hat{y}$. Требуется найти *угол, на который частица будет отклонена этим полем.*

Имеем уравнения движения

$$\frac{dp_x}{dt}=0, \quad \frac{dp_y}{dt}=q\mathscr{E}, \tag{13}$$

откуда

$$p_x=p_0, \quad p_y=q\mathscr{E}t. \tag{14}$$

Требуется найти скорость $\mathbf{v}$. Если мы сможем определить энергию E, то скорость можно будет найти, используя соотношение $\mathbf{v}=\mathbf{p}c^2/E$, выведенное в гл. 12.

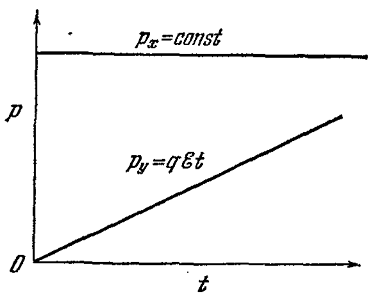

Рис. 13.3. Сила, действующая в направлении y, равна $q\mathscr{E}$, так что $p_y=q\mathscr{E}t$, тогда как p_x остается постоянным. Энергия

$$E=c\sqrt{(p_x^2+p_y^2)+M^2c^2}$$

возрастает.

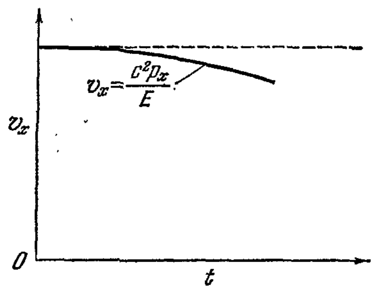

Рис. 13.4. Так как

$$v_x=c^2p_x/E,$$

происходит *уменьшение* v_x при ускорении частицы в направлении y. Нерелятивистская механика предсказала бы, разумеется, постоянство v_x.

Энергию определяем следующим образом:

$$E^2=M^2c^4+p^2c^2=M^2c^4+p_0^2c^2+(q\mathscr{E}tc)^2=E_0^2+(q\mathscr{E}tc)^2, \tag{15}$$

где E_0— начальная энергия. Поэтому, используя (14) и соотношение между скоростью и импульсом, имеем

$$v_x=\frac{p_0c^2}{[E_0^2+(q\mathscr{E}tc)^2]^{1/2}}, \tag{16}$$

$$v_y=\frac{q\mathscr{E}tc^2}{[E_0^2+(q\mathscr{E}tc)^2]^{1/2}}. \tag{17}$$

Отметим, что v_x уменьшается с ростом t. Мы также видим, что v_y всегда меньше своего нерелятивистского значения $q\mathscr{E}t/M$. Угол, образуемый траекторией с осью x в момент t, определяется выражением

$$\operatorname{tg}\theta(t)=\frac{v_y}{v_x}=\frac{q\mathscr{E}tc^2}{p_0c^2}=\frac{q\mathscr{E}t}{p_0}. \tag{18}$$

Время t_L, затрачиваемое на прохождение пути L, можно найти, решая (16) относительно x:

$$\int_0^L dx = p_0 c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[E_0^2 + (q\mathscr{E}tc)^2]^{1/2}}, \tag{19}$$

или, следуя Дуайту (Dwight, 728,1):

$$L = \frac{p_0 c}{q\mathscr{E}} \operatorname{Arsh}\left(\frac{q\mathscr{E}t_L c}{E_0}\right), \tag{20}$$

откуда

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathscr{E}c} \operatorname{sh}\frac{q\mathscr{E}L}{p_0 c}. \tag{20a}$$

13.2. Заряженная частица в магнитном поле

Переходим к рассмотрению важной практической задачи исследования движения частицы с зарядом q в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$. Уравнение движения в этом случае:

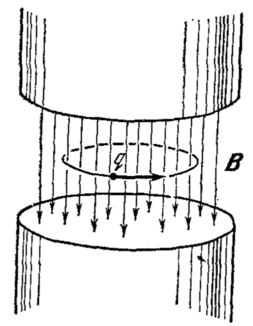

Рис. 13.5. Частица со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной к однородному магнитному полю, совершает движение по окружности радиусом $\rho = pc/qB$.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

Как и в нерелятивистской задаче (см. гл. 4), здесь можно написать $dp^2/dt = 0$, так как

$$\frac{d}{dt} p^2 = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\,\frac{q}{c}\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}; \tag{22}$$

но $\mathbf{p}$ всегда параллельно $\mathbf{v}$, так что смешанное произведение равно нулю. Таким образом, постоянное магнитное поле не влияет на величину импульса и, следовательно, величину скорости частицы. Но если поле влияет только на направление, множитель

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{23}$$

входящий в выражение для $\mathbf{p}$, постоянен.

Тогда уравнение движения (21) может быть переписано в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{24}$$

Вследствие постоянства величины в (23), это уравнение имеет решения, согласно которым частица движется по окружности. Обозначим через ρ радиус окружности и через ω_c угловую частоту движения частицы. Подставляя в (24) центростремительное ускорение $\omega_c^2\rho$ вместо $d\mathbf{v}/dt$ и $\omega_c\rho$ вместо v, получаем

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \omega_c^2 \rho = \frac{q}{c} \omega_c \rho B, \tag{25}$$