Время t_L, затрачиваемое на прохождение пути L, можно найти, решая (16) относительно x:

$$\int_0^L dx = p_0 c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[E_0^2+(q\mathscr{E}tc)^2]^{1/2}}, \tag{19}$$

или, следуя Дуайту (Dwight, 728,1):

$$L = \frac{p_0 c}{q\mathscr{E}} \operatorname{Arsh}\left(\frac{q\mathscr{E}t_L c}{E_0}\right), \tag{20}$$

откуда

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathscr{E}c} \operatorname{sh} \frac{q\mathscr{E}L}{p_0 c}. \tag{20a}$$

13.2. Заряженная частица в магнитном поле

Переходим к рассмотрению важной практической задачи исследования движения частицы с зарядом q в однородном постоянном магнитном поле с индукцией **B**. Уравнение движения в этом случае:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

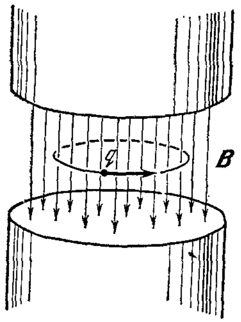

Рис. 13.5. Частица со скоростью v, перпендикулярной к однородному магнитному полю, совершает движение по окружности радиусом $\rho = pc/qB$.

Как и в нерелятивистской задаче (см. гл. 4), здесь можно написать $dp^2/dt=0$, так как

$$\frac{d}{dt} p^2 = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\frac{q}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}; \tag{22}$$

но **p** всегда параллельно **v**, так что смешанное произведение равно нулю. Таким образом, постоянное магнитное поле не влияет на величину импульса и, следовательно, величину скорости частицы. Но если поле влияет только на направление, множитель

$$\frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{23}$$

входящий в выражение для р, постоянен.

Тогда уравнение движения (21) может быть переписано в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{24}$$

Вследствие постоянства величины в (23), это уравнение имеет решения, согласно которым частица движется по окружности. Обозначим через ρ радиус окружности и через ω_c угловую частоту движения частицы. Подставляя в (24) центростремительное ускорение $\omega_c^2\rho$ вместо $d\mathbf{v}/dt$ и $\omega_c\rho$ вместо v, получаем

$$\frac{M}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \omega_c^2 \rho = \frac{q}{c} \omega_c \rho B, \tag{25}$$

откуда

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{Mc}}. \qquad (26)$$

Мы видим, что для быстрых частиц угловая частота движения меньше, чем для медленных. Таким образом, циклотрон может использоваться для ускорения частиц до релятивистских энергий только при том условии, что частота высокочастотного ускоряющего поля (или напряженность магнитного поля) модулируется так, чтобы обеспечивался синхронизм с применением частоты (26) при постепенном росте энергии частиц. Для нерелятивистских частиц зависимостью частоты от скорости можно пренебречь.

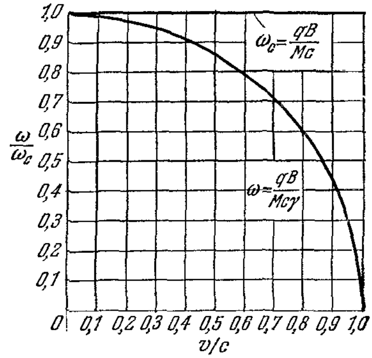

Рис. 13.6. Циклотронная частота ω заряда q с массой покоя M, движущегося по круговой траектории в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю **B**, как функция отношения скоростей v/c. Нерелятивистская циклотронная частота ω_c характеризуется горизонтальной прямой.

Значения ω_c, предсказываемые уравнением (26), находят полное экспериментальное подтверждение в работе ускорителей на высокие энергии. Это соотношение было подтверждено для электронов, ускорявшихся в циклотроне при $1/(1-\beta^2)^{1/2} \approx 2000$, т. е. когда кажущаяся масса *) частицы в 2000 раз больше ее массы покоя. Интересно выяснить, какова при этом разность $c-v$, т. е. насколько скорость света превышает скорость частицы. Имеем

$$1-\beta^2 = (1+\beta)(1-\beta) \cong 2(1-\beta) \cong 2000^{-2}. \qquad (27)$$

При этом мы приближенно положили $1+\beta \cong 2$. Из (27) следует:

$$1-\beta = \frac{c-v}{c} \approx 10^{-7}, \quad c-v \approx 3 \cdot 10^3 \text{ см/сек}. \qquad (28)$$

В составе космического излучения, по-видимому, обнаруживаются протоны с разностью $c-v \approx 10^{-12}$ *см/сек*; здесь значение β вычисляется из данных по рассеянию энергии частицы при актах столкновения в атмосфере.

Как следует из (26), радиус круговой траектории релятивистской частицы в магнитном поле равен

$$\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{cMv}{qB\,(1-\beta^2)^{1/2}}. \qquad (29)$$

---

*) То есть масса по оценке наблюдателя, относительно которого частица движется со скоростью V. (*Прим. ред.*)

Но правая часть содержит выражение для импульса p, так что

$$\boxed{B\rho = \frac{cp}{q}.} \tag{30}$$

Таким образом, радиус ρ круговой траектории, описываемой заряженной частицей в магнитном поле, может служить прямой мерой релятивистского импульса. Последнее соотношение лежит в основе важнейшего прямого некомбинированного метода измерения импульса заряженной релятивистской частицы. Этот метод используется при анализе фотографий, полученных с помощью пузырьковой камеры (см. гл. 15).

13.3. Система центра масс и пороговая энергия

Сохранение энергии налагает общее ограничение на ядерные реакции или на акты взаимодействия при столкновениях частиц. Например, фотон высокой энергии (гамма-лучи) может породить электронно-позитронную пару по реакции

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \tag{31}$$

только при условии, что его энергия превышает энергетический эквивалент масс покоя электрона и позитрона. Таким образом, уже одно условие сохранения энергии определяет порог минимальной энергии, необходимой для образования электронно-позитронной пары:

$$E_\gamma = 2mc^2 \cong 1{,}02\cdot 10^6 \text{ эв}. \tag{32}$$

Напомним, что массы покоя электрона и позитрона одинаковы.

В свободном пространстве, однако, эта реакция не может осуществляться ни при какой энергии, так как не может быть обеспечено сохранение импульса. В гл. 12 было показано, что импульс фотона равен $p_\gamma = E_\gamma/c$. Рассмотрим реакцию в системе отсчета, в которой центр масс протона и электрона остается в покое. В этой системе сумма импульсов электрона и позитрона равна нулю:

$$\mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+} = 0. \tag{33}$$

Но в этой системе импульс налетающего фотона не равен нулю, так как не существует системы отсчета, в которой импульс фотона мог бы исчезнуть *). Таким образом, в системе центра масс

$$\mathbf{p}_\gamma \neq \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+} = 0, \tag{34}$$

и реакция (31) неверна (не имеет места) вследствие несохранения импульса. Но если эта реакция невозможна в одной системе отсчета, то она невозможна и ни в какой другой системе.

*) Приняв другую систему отсчета, мы можем изменить частоту фотона, но при этом он не может быть ни уничтожен, ни остановлен.