где $E_{\text{полн(ц.м)}}$ является суммой E_1+E_2 в системе центра масс. Если обозначить полную энергию $E_1+M_\text{p}c^2$ в лабораторной системе, то из (44) получаем

$$2E_{\text{полн (лаб)}} M_\text{p}c^2 = E^2_{\text{полн (ц. м)}}, \tag{45}$$

или

$$\boxed{\frac{E_{\text{полн (ц. м)}}}{E_{\text{полн (лаб)}}} = \frac{2M_\text{p}c^2}{E_{\text{полн (ц. м)}}}.} \tag{46}$$

Это отношение и является мерой «коэффициента полезного действия». Чтобы получить полную энергию в 20 *Гэв* в системе центра масс, учитывая, что $M_\text{p}c^2 \approx 1$ *Гэв*, потребуется

$$E_{\text{полн (лаб)}} = \frac{E_{\text{полн (ц. м)}}}{2M_\text{p}c^2} \approx \frac{400}{2}\ \textit{Гэв} \approx 200\ \textit{Гэв}. \tag{47}$$

В этом случае из кинетической энергии протона, разогнанного до 200 *Гэв* относительно лабораторной системы, для образования новых частиц доступны только 20 *Гэв*. Вследствие такого низкого коэффициента полезного действия внимание было сосредоточено на таких системах ускорителей, в которых сталкиваются два пучка частиц, распространяющихся в противоположных направлениях, так что лабораторная система отсчета становится системой центра масс.

13.4. Антипротонный порог

Энергия бэватрона в Беркли была рассчитана на генерацию антипротонов (обозначаемых $\overline{\text{p}}$) путем бомбардировки неподвижных протонов протонами высоких энергий. Реакция может быть записана следующим образом:

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + (\text{p} + \overline{\text{p}}), \tag{48}$$

т. е. в результате образуется протонно-антипротонная пара. Закон сохранения заряда при этом выполняется, так как антипротон имеет заряд $-e$. Какова пороговая энергия этой реакции?

Энергия покоя протонно-антипротонной пары составляет $2M_\text{p}c^2$, так как массы покоя антипротона и протона одинаковы. В системе центра масс *кинетическая* энергия должна быть поэтому по меньшей мере равна $2M_\text{p}c^2$, что составляет $M_\text{p}c^2$ на каждый из исходных протонов. К этому надо прибавить *энергию покоя* $M_\text{p}c^2$ каждого из исходных протонов, так что минимальная полная энергия в системе центра масс должна составлять

$$E_{\text{полн (ц. м)}} = 4M_\text{p}c^2. \tag{49}$$

На основании (46) в лабораторной системе соответствующая энергия равна

$$E_{\text{полн (лаб)}} = \frac{E^2_{\text{полн (ц. м)}}}{2M_\text{p}c^2} = \frac{16}{2} M_\text{p}c^2; \tag{50}$$

сюда входит $2M_p c^2$ в виде энергии покоя двух протонов и $6M_p c^2$ — в виде кинетической энергии. Таким образом, пороговая энергия составляет

$$6M_p c^2 = 6\,(0{,}938\ \textit{Гэв}) \cong 5{,}63\ \textit{Гэв}. \qquad (51)$$

Если налетающий протон сталкивается с протоном, связанным в ядре, то пороговая энергия понижается, так как протон-мишень связан. Ясно ли, почему это так? Экспериментально наблюдаемая пороговая энергия образования антипротона составляет 4,4 *Гэв*, что на 1,2 *Гэв* меньше вычисленной для свободного покоящегося протона-мишени. Этот порог в лабораторной системе отсчета представляет собой минимальную кинетическую энергию, которой должен обладать налетающий протон, чтобы вызвать рассматриваемую реакцию.

13.5. Релятивистское уравнение ракеты

Представим себе ракету в момент, когда она находится в мгновенном состоянии покоя относительно системы отсчета S', испытывая, однако, постоянное ускорение a' относительно той же системы. На основании выводов гл. 11 мы знаем, что приращение скорости $\Delta v'$ в системе S' связано с приращением скорости Δv в инерциальной системе S соотношением

$$\Delta v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta v', \qquad (52)$$

где v — скорость системы S' относительно системы S. Система S может, например, быть связана с Землей. Обозначая ускорение dv'/dt' через a', получаем из (52)

$$\frac{\Delta v}{1 - v^2/c^2} = \frac{dv'}{dt'}\,\Delta t' = a'\,\Delta t', \qquad (53)$$

где $\Delta t'$ — промежуток времени, измеренный в системе S'. Если ракета начинает свое движение из состояния покоя относительно системы S в момент $t' = 0$, то левая и правая части (53) интегрируются в соответствующих пределах:

$$c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = a' \int_0^{t'} dt'. \qquad (54)$$

По Дуайту (Dwight, 728,4) имеем

$$c\,\mathrm{Arth}\left(\frac{v}{c}\right) = a't', \qquad \frac{v}{c} = \mathrm{th}\,\frac{a't'}{c}. \qquad (55)$$

Полный путь ракеты с точки зрения системы S находится дальнейшим интегрированием:

$$x = \int_0^t v\,dt = \int_0^{t'} v\,\frac{dt'}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \qquad (56)$$