

сюда входит $2M_p c^2$ в виде энергии покоя двух протонов и $6M_p c^2$ — в виде кинетической энергии. Таким образом, пороговая энергия составляет

$$6M_p c^2 = 6(0,938 \text{ Гэв}) \cong 5,63 \text{ Гэв.} \quad (51)$$

Если налетающий протон сталкивается с протоном, связанным в ядре, то пороговая энергия понижается, так как протон-мишень связан. Ясно ли, почему это так? Экспериментально наблюдаемая пороговая энергия образования антипротона составляет $4,4 \text{ Гэв}$, что на $1,2 \text{ Гэв}$ меньше вычисленной для свободного покоящегося протона-мишени. Этот порог в лабораторной системе отсчета представляет собой минимальную кинетическую энергию, которой должен обладать налетающий протон, чтобы вызвать рассматриваемую реакцию.

13.5. Релятивистское уравнение ракеты

Представим себе ракету в момент, когда она находится в мгновенном состоянии покоя относительно системы отсчета S' , испытывая, однако, постоянное ускорение a' относительно той же системы. На основании выводов гл. 11 мы знаем, что приращение скорости $\Delta v'$ в системе S' связано с приращением скорости Δv в инерциальной системе S соотношением

$$\Delta v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta v', \quad (52)$$

где v — скорость системы S' относительно системы S . Система S может, например, быть связана с Землей. Обозначая ускорение dv'/dt' через a' , получаем из (52)

$$\frac{\Delta v}{1 - v^2/c^2} = \frac{dv'}{dt'} \Delta t' = a' \Delta t', \quad (53)$$

где $\Delta t'$ — промежуток времени, измеренный в системе S' . Если ракета начинает свое движение из состояния покоя относительно системы S в момент $t' = 0$, то левая и правая части (53) интегрируются в соответствующих пределах:

$$c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = a' \int_0^{t'} dt'. \quad (54)$$

По Дуайту (Dwight, 728,4) имеем

$$c \operatorname{Arth} \left(\frac{v}{c}\right) = a' t', \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} \frac{a' t'}{c}. \quad (55)$$

Полный путь ракеты с точки зрения системы S находится дальнейшим интегрированием:

$$x = \int_0^{t'} v dt = \int_0^{t'} v \frac{dt'}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (56)$$

На основании (53)

$$dt' = \frac{1}{a'} \frac{c^2 dv}{c^2 - v^2}, \quad (57)$$

так что (56) принимает вид

$$x = \frac{c^3}{a'} \int_0^v \frac{v}{(c^2 - v^2)^{3/2}} dv = \frac{c^3}{a'} \left[\frac{1}{(c^2 - v^2)^{1/2}} - \frac{1}{c} \right]. \quad (58)$$

С другой стороны, на основании (11.18) и (11.20) получаем из (55)

$$\text{ch} \frac{a't'}{c} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (59)$$

откуда (58) приводится к виду

$$x = \frac{c^2}{a'} \left(\text{ch} \frac{a't'}{c} - 1 \right). \quad (60)$$

Из (60) следует, что, пропутешествовав в ракете в течение 21 года с точки зрения с в о е й системы отсчета S' при постоянном ускорении в 1 см/сек^2 , космонавт покрыл бы расстояние в $1,2 \cdot 10^9$ св. лет относительно системы S . Спрашивается, как далеко успел бы он улететь, если рассуждать, исходя из предела преобразования Галилея, т. е. из $c \rightarrow \infty$?

Задачи

1. Вычислить радиус круговой траектории и угловую частоту протона, имеющего полную релятивистскую энергию в 10 Гэв , в магнитном поле с индукцией в $10\,000 \text{ гс}$.

О т в е т. $\omega_c = 9 \cdot 10^8 \text{ рад/сек}$.

2. Какова энергия отдачи (в эргах и электрон-вольтах) для ядра с массой 10^{-23} г после испускания гамма-луча с энергией в 1 Мэв ?

О т в е т. $1,4 \cdot 10^{-10} \text{ эрг}$; 90 эв .

3. Электрон, имеющий энергию 10 Гэв , сталкивается с покоящимся протоном.

а) Какова скорость системы центра масс?

б) Какова энергия, доступная для генерации новых частиц? (Выразить в единицах $M_p c^2$.)

4. При высоких энергиях циклотронная частота зависит от скорости ускоряемой частицы. Для поддержания синхронности периодического движения частицы и ускоряющего переменного электрического поля перед конструктором ставится требование, чтобы налагаемая высокая частота или индукция магнитного поля (или то и другое одновременно) изменялись, следуя за процессом ускорения. Показать, что частота генератора ω должна быть пропорциональна отношению V/E , где V — индукция магнитного поля и E — полная энергия частицы. (Следует воспользоваться формулой (26).)

5. В одной из стадий своего развития 184 -дюймовый циклотрон в Беркли работал на постоянном магнитном поле напряженностью около $15\,000 \text{ гс}$.

а) Вычислить нерелятивистскую циклотронную частоту для протонов в этом поле.

О т в е т. $1,4 \cdot 10^8 \text{ рад/сек}$.

б) Вычислить частоту, которая должна была бы соответствовать конечной кинетической энергии в 300 Мэв .

6. Для релятивистского движения ракеты было найдено в (59), что

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \text{ch} \frac{a't'}{c}.$$

а) Определить γ для $a' = 10^8$ см/сек² и $t' = 10$ лет (около $3 \cdot 10^8$ сек).

б) Если по истечении этого времени масса покоя ракеты составляет 1000 кг, то какова при этом масса, наблюдаемая в системе S?

О т в е т. 10^7 кг.

в) Какова кинетическая энергия в системе S? Можно ли практически получить такую энергию?

О т в е т. 10^{31} эрг.

7. а) Показать, что свободный электрон, движущийся в вакууме со скоростью v , не может излучить один квант. Другими словами, требуется показать, что такое испускание нарушило бы законы сохранения.

б) В возбужденном электронном состоянии атом водорода может излучить световой квант. Показать, что при этом возможно соблюдение законов сохранения. Какова причина различия между результатами в случаях а) и б)?

8. Вычислить импульс, полную энергию и кинетическую энергию протона, у которого $\beta = v/c = 0,99$, в следующих системах отсчета:

а) в лабораторной системе.

О т в е т. $6,58$ Гэв/с; $6,63$ Гэв; $5,69$ Гэв

б) в системе, движущейся вместе с частицей.

в) в системе центра масс протона и неподвижного ядра гелия, считая, что $M_{He} \approx 4M_p$.

9. Найти радиус орбиты частицы с зарядом e и энергией 10^{19} эв в магнитном поле с индукцией в 10^{-6} гс (указанное значение индукции магнитного поля вполне возможно в нашей Галактике). Сравнить полученное значение радиуса с диаметром нашей Галактики. (Частицы таких огромных энергий, вызывающие акты взаимодействия, встречаются в космических лучах; они создают так называемые *широкие атмосферные ливни*, в состав которых входят электроны, позитроны, гамма-лучи и мезоны.)

10. а) Вычислить радиус кривизны траектории протона с кинетической энергией 1 Гэв в поперечном магнитном поле с индукцией в $20\ 000$ гс.

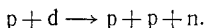
О т в е т. 284 см.

б) Какое поперечное электрическое поле потребовалось бы для придания траектории такого же радиуса кривизны? Использовать то обстоятельство, что радиус кривизны кривой $y(x)$ может быть выражен как $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / (d^2y/dx^2)$.

О т в е т. $1,75 \cdot 10^4$ ед. СГСЭ.

в) Принимая во внимание величину магнитного и электрического полей в а) и б), рассмотреть возможность использования электрических полей для отклонения релятивистских частиц.

11. Рассматривается ядерная реакция, в которой налетающий протон с кинетической энергией K_p расщепляет неподвижный дейтрон по схеме



Вблизи порогового значения энергии оба протона и нейтрон движутся в виде скопления несцепленных частиц, имеющих приблизительно одинаковую скорость. Написать нерелятивистские выражения для количества движения и энергии, а также показать, что пороговое значение кинетической энергии налетающего протона составляет

$$K_p^0 = 3/2 E_{св},$$

где $E_{св} (\approx 2$ Мэв) — энергия связи свободных нейтрона и протона в дейтроне.

12. При выводе выражения пороговой энергии для взаимодействия частиц высоких энергий мы видели, что удобно рассматривать условия в системе центра масс. Рассмотрим реакцию $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, где гамма-фотон налетает на неподвижный протон и образует π^0 -мезон.

а) Показать, что пороговая энергия фотона равна

$$E_\gamma = M_\pi \left(1 + \frac{M_\pi}{2M_p} \right) c^2.$$

б) В энергию покоя нейтрального мезона превращается не вся начальная энергия фотона. Какой процент не превращается? Куда девается непревращенная часть?