Брокен, Хохехаген и Инзельберг в Германии. Наибольшая сторона треугольника имела длину около 100 *км*. Измеренные внутренние углы были равны:

	86°	13′	58,366″
	53°	6′	45,642″
	40°	39′	30,165″
Сумма	180°	00′	14,173″

Мы не нашли в работах Гаусса указаний по поводу оценки точности этих значений; вероятно, последние два десятичных знака не являются достоверными. Поскольку на каждой из трех вершин геодезические приборы устанавливались по местной плоскости горизонта, эти три горизонтальные плоскости не были параллельными. Вычисленную поправку, названную сферическим избытком и равную 14,853 дуговой секунды, надо вычесть из полученной суммы углов. Исправленная сумма, равная 179° 59′59, 320″, отличается от 180° на 0,680 дуговой секунды. Гаусс считал, что эта величина находится в пределах ошибок измерений, и сделал вывод, что в пределах точности этих измерений пространство является евклидовым.

Из приведенного выше примера очевидно, что евклидова геометрия дает правильное описание свойств маленького треугольника на обыкновенной двумерной сферической поверхности, а отклонения от евклидовой геометрии становятся все более значительными по мере увеличения размеров. Для того чтобы убедиться, что наше трехмерное физическое пространство действительно является плоским, нам надо произвести измерения с очень большими треугольниками, вершины которых образованы Землей и удаленными звездами или даже галактиками. Однако мы сталкиваемся с такой трудностью: наше положение определяется положением Земли, и мы еще не имеем возможности передвигаться в космическом пространстве с масштабными линейками, чтобы измерять стороны и углы астрономических треугольников. Как же мы можем проверить справедливость евклидовой геометрии в отношении описания измерений в мировом пространстве?

1.3. Оценки кривизны мирового пространства

Данные о движении планет. Первая оценка нижнего предела возможной величины радиуса кривизны для нашей Вселенной как $5 \cdot 10^{17}$ *см* следует из взаимной согласованности данных астрономических наблюдений внутри Солнечной системы. Например, положения планет Нептуна и Плутона были определены расчетом до того, как эти планеты были визуально обнаружены при наблюдении в телескоп. Небольшие возмущения орбит уже известных планет привели к открытию Нептуна и Плутона, причем фактически найденные положения этих двух планет были очень близки к рассчитанным.

Мы легко можем представить, что даже маленькое отклонение от законов геометрии нарушило бы это совпадение. Крайняя планета Солнечной системы — это Плутон. Средний радиус орбиты Плутона равен $6 \cdot 10^{14}$ *см*; близкое совпадение между рассчитанным и наблюденным положениями его означает, что радиус кривизны мирового пространства должен быть не меньше $5 \cdot 10^{17}$ *см*. С этими данными не расходится и допущение, что радиус кривизны равен бесконечности, т. е. что мировое пространство является плоским. Обсуждение деталей числового расчета, давшего значение $5 \cdot 10^{17}$ *см*, или точное определение того, что понимается под радиусом кривизны трехмерного пространства, увело бы нас слишком далеко в сторону от цели. В этом трудном случае в качестве полезной модели опять можно использовать двумерную аналогию — поверхность шара.

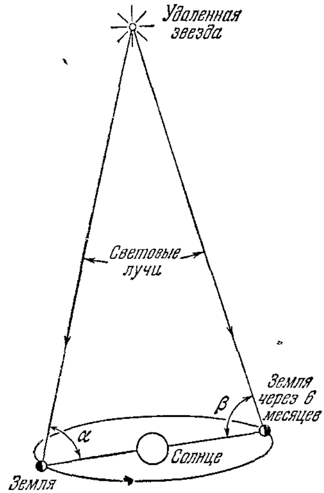

Рис. 1.11. Схема Шварцшильда, показывающая, что на плоской поверхности $\alpha+\beta < 180°$. Параллакс звезды по определению равен $(180°-\alpha-\beta)/2$

Тригонометрический параллакс. Другой метод проверки был предложен Шварцшильдом *). Между двумя наблюдениями, произведенными с интервалом в 6 месяцев, положение Земли относительно Солнца изменяется на $3 \cdot 10^{13}$ *см*, т. е. на длину диаметра ее орбиты. Предположим, что в эти два момента мы наблюдали за какой-то звездой и измерили углы α и β, как показано на рис. 1.11. Если пространство является плоским, то сумма углов $\alpha+\beta$ всегда меньше 180°, но эта сумма приближается к значению 180°, если звезду можно считать бесконечно удаленной. Половина отклонения суммы $\alpha+\beta$ от 180° называется параллаксом. Однако для пространства, обладающего кривизной, не обязательно, чтобы сумма углов $\alpha+\beta$ всегда была меньше 180°.

Вернемся к нашим двумерным астрономам, живущим на поверхности шара, чтобы увидеть, как они могут определить по измерениям суммы $\alpha+\beta$, что их пространство имеет кривизну (рис. 1.12).

Из указанного рассуждения относительно треугольника ABC мы видим, что $\alpha+\beta=180°$, когда звезда отстоит от BC на четверть длины окружности большого круга. Если звезда ближе к BC, то $\alpha+\beta<180°$; если она находится дальше, то $\alpha+\beta>180°$. Астрономам надо только смотреть на все более и более удаленные звезды, чтобы убедиться, что сумма углов становится больше 180°. Те же

*) K. Schwarzschild, Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft **35**, 337 (1900).

соображения справедливы и внутри нашего трехмерного пространства.

Мы не имеем данных наблюдения, согласно которым сумма $\alpha+\beta$, измеренная астрономами, где-либо становилась бы больше 180° после того, как была введена соответствующая поправка на движение звезды относительно центра нашей Галактики. Значения $\alpha+\beta$, меньшие 180°, используются для определения расстояний до ближайших звезд методом триангуляции. Значения, меньшие 180°, можно наблюдать для звезд, расстояния которых от Земли достигают величины $3\cdot10^{20}$ *см* *), предельной для измерения углов с помощью современных телескопов. Из этого рассуждения можно непосредственно сделать вывод, что радиус кривизны мирового пространства должен быть больше $3\cdot10^{20}$ *см*; для некоторых типов кривизны пространства необходим иной ход рассуждений **). Окончательный ответ гласит, что радиус кривизны, определенный триангуляцией, в любом случае должен быть больше чем $6\cdot10^{19}$ *см*.

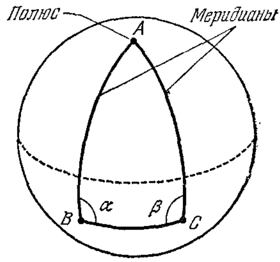

Рис. 1.12. Для этого треугольника, у которого B и C находятся ниже экватора, $\alpha+\beta > 180°$, что может иметь место только потому, что двумерное «пространство» шаровой поверхности обладает кривизной. Подобное же рассуждение можно применить и к трехмерному пространству. Радиус кривизны изображенного здесь двумерного пространства — это как раз радиус шара.

В начале этой главы мы говорили, что из наблюдений была определена характеристическая длина, связанная со Вселенной, которая имеет величину порядка 10^{28} *см*, или 10^{10} световых лет. Наиболее бесхитростная интерпретация этой длины заключается в том, чтобы назвать ее радиусом Вселенной ***). Другая возможная интерпретация — считать ее радиусом кривизны мирового пространства. Каково же строение мирового пространства? Это вопрос космологии; прекрасное введение в эту теоретическую науку о космосе дается в книге Бонди (H. Bondi, Cosmology, 2nd ed., New York, 1960, Cambridge Univ. Press). Мы можем резюмировать наши познания в отношении радиуса кривизны мирового пространства, констатируя, что он не может быть меньше чем 10^{28} *см* и что мы не знаем, обладает ли мировое пространство кривизной в масштабе длин, превышающих эту величину.

---

*) Можно возразить, что сам этот метод измерения расстояний основан на предположении, что применима евклидова геометрия. Однако имеются другие методы определения расстояний, которые излагаются в современных книгах по астрономии.

**) Имеется в виду трехмерное пространство с такой кривизной (например, всюду отрицательной или же изменяющейся по знаку), для которого поверхность шара уже не является двумерной аналогией. *(Прим. ред.)*

***) Термин «кривизна мирового пространства» вполне ясен по смыслу, и его можно считать достаточно строгим. Что же касается выражения «радиус кривизны Вселенной», то оно хотя и связано с представлением о кривизне пространства, этими качествами не обладает ввиду сложности понятия «Вселенная». *(Прим. ред.)*