ГЛАВА 2

ВЕКТОРЫ

2.1. Термины и понятия. Векторная система обозначений

Терминология является существенной составной частью всякой научной теории. Трудно выразить сложные и абстрактные понятия на языке, не имеющем слов, соответствующих этим понятиям. Поэтому для выражения новых научных понятий создаются и вводятся в язык науки новые термины; многие из них образуются от корней слов классического греческого или латинского языка. Новый термин может приобрести «права гражданства» сразу во многих современных языках, если он удовлетворяет потребностям научного общения. Таким образом, русскому слову *вектор* соответствует английское vector, французское vecteur и немецкое Vektor. *Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовую величину, но и направление.* Этот смысл слова «вектор» представляет собой обобщение его прежнего, ныне устаревшего значения в астрономии, где вектором назывался воображаемый прямолинейный отрезок, соединяющий планету, обращающуюся вокруг центра или фокуса эллипса, с этим центром или фокусом.

Система обозначений входит составной частью в математический язык и поэтому является важной принадлежностью математики. Векторная система обозначений имеет два существенных преимущества.

1. Формулировки физических законов в векторной форме не зависят от выбора осей координат. Векторная система обозначений представляет собой такой язык, в котором формулировки имеют физическое содержание даже без введения системы координат.

2. Векторная система обозначений является компактной. Многие физические законы выражаются через векторные величины в простой и обозримой форме, которая не сохраняется при выражении их через проекции этих величин в какой-либо системе координат.

Мы будем выражать законы физики в векторной форме, где это возможно, хотя при решении задач мы чаще всего предпочитаем оперировать с определенной системой координат. Некоторые более сложные законы, которые нельзя выразить в векторной форме, могут быть сформулированы в виде тензорных соотношений. *Тензор* представляет собой обобщение вектора, включающее вектор как частный случай. Векторный анализ в его современном виде является главным образом результатом относящихся к концу девятнадцатого столетия работ Джошуа Вилларда Гиббса и Оливера Хевисайда.

Единичным вектором называется вектор, абсолютная величина которого равна единице *). Единичный вектор в направлении **A**

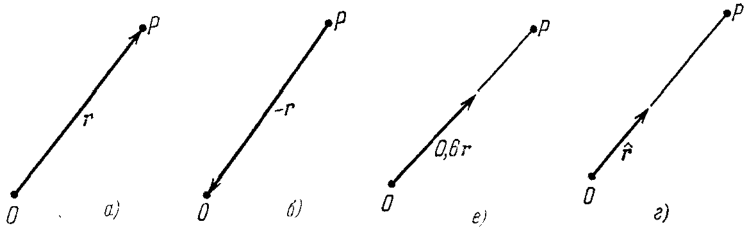

Рис. 2.1. *а*) Вектор **r** выражает положение точки P относительно другой точки O как начала отсчета. *б*) Вектор $-\mathbf{r}$ равен по величине, но противоположен по направлению вектору **r**. *в*) Вектор $0,6\,\mathbf{r}$ имеет то же направление, что и вектор **r**, а его абсолютная величина равна $0,6\,\mathbf{r}$. *г*) Вектор $\hat{\mathbf{r}}$ — это единичный вектор в направлении **r**. Заметьте, что $\mathbf{r}=r\hat{\mathbf{r}}$.

пишется со значком $\wedge$: $\hat{\mathbf{A}}$ читается, как «единичный вектор направления **A**» или «**A** с шапочкой». Эти правила обозначения можно кратко выразить следующим тождеством:

$$\mathbf{A} \equiv A\hat{\mathbf{A}}. \tag{1}$$

Применимость векторов для удобства выражения физических соотношений в значительной степени основывается на геометрии Евклида. При выражении физических законов в векторной форме обычно предполагают, что выполняются все положения евклидовой геометрии. Если же геометрия пространства не является евклидовой, то операция сложения двух векторов может оказаться непростой и неоднозначной. Для пространства, обладающего кривизной, существует более общий математический язык — это метрическая дифференциальная геометрия, язык общей теории относительности, т. е. той области физики, в которой евклидову геометрию уже нельзя считать достаточно точной.

Мы говорили, что вектор — это количественная характеристика, имеющая не только числовую величину, но и направление. Это свойство совершенно не связано с какой-либо конкретной системой

*) Установим следующие правила применения векторной системы обозначений. Векторная величина обозначается буквой со стрелкой над ней $\vec{A}$. В печати обозначения векторов обычно набираются жирным шрифтом. Абсолютная величина вектора печатается курсивом: A — это абсолютная величина вектора $\vec{A}$. Вместо A пишут также $|\vec{A}|$.

координат *). Однако мы увидим, что не все величины, имеющие числовое значение и направление, обязательно являются векторами.

По определению *скаляром называется такая величина, которая не имеет направления и имеет числовое значение, не зависящее от системы координат*. Например, абсолютная величина вектора представляет собой скаляр. Координата x неподвижной точки — не скаляр, потому что величина координаты x зависит от направления, выбранного для оси x. Температура T — это скаляр, скорость $\mathbf{v}$ — это вектор.

Равенство векторов. По определению два вектора **A** и **B** равны, если они имеют одинаковую абсолютную величину и одинаковое направление. Не обязательно, чтобы начальная точка вектора была закреплена, хотя вектором может быть обозначена величина, относящаяся и к определенной точке пространства.

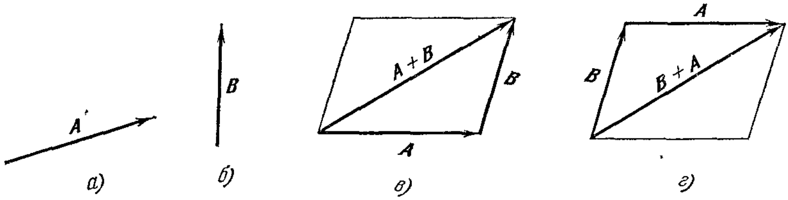

Рис. 2.2. *а*) Вектор **A**. *б*) Вектор **B**. *в*) Векторная сумма **A**+**B**. *г*) Векторная сумма **B**+**A** равна **A**+**B**

Можно сравнивать два вектора, даже если они выражают физические величины, определенные в разных точках пространства и в разные моменты времени. Если бы мы не могли удостовериться на основании опыта, что можно считать пространство неискривленным (за исключением, может быть, тех случаев, когда речь идет об огромных космических расстояниях), то результат сравнения двух векторов, имеющих различные начальные точки, возможно, оказался бы неоднозначным (см. «Математическое дополнение 1» в конце этой главы).

Сложение векторов. Сумма двух векторов **A** и **B** определяется согласно геометрическому построению, показанному на рис. 2.2. Это построение часто называется законом сложения векторов по правилу параллелограмма. Для определения суммы **A**+**B** вектор **B** переносится параллельно самому себе таким образом, чтобы его начальная точка совпала с конечной точкой вектора **A**. Вектор, проведенный от начальной точки **A** к конечной точке вектора **B**,— это сумма векторов **A**+**B**. Из рис. 2.2, *в* и *г* следует, что **A**+**B**= =**B**+**A**, т. е. что сложение векторов *коммутативно*.

Вычитание векторов определяется, как показано на рис. 2.3 и 2.4.

*) Мы предполагаем, что всегда можно точно указать направление вектора. В некоторых случаях мы можем определить это направление относительно лаборатории, в других — относительно неподвижных звезд.

Сложение векторов удовлетворяет соотношению $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$, так что можно сказать, что сложение векторов *ассоциативно*, т. е. для него выполняется сочетательный закон. Сумма конечного числа векторов не зависит от порядка, в котором они складываются. Если $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}$, то, прибавляя к обеим частям равенства по $\mathbf{B}$, мы получаем $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$. Во всех случаях можно оперировать с суммами и разностями векторов так, как если бы это были числа. Если k — скаляр, то

$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}, \qquad (2)$$

так что можно сказать, что умножение вектора на скаляр *дистрибутивно*, т. е. для него выполняется распределительный закон.

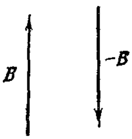

Рис. 2.3. Векторы $\mathbf{B}$ и $-\mathbf{B}$.

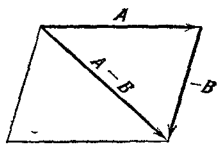

Рис. 2.4. Образование разности $\mathbf{A}-\mathbf{B}$; вычитание векторов.

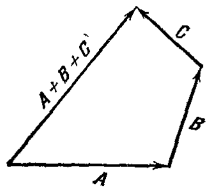

Рис. 2.5. Сумма трех векторов: $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$. Проверьте самостоятельно, что эта сумма равна $\mathbf{B}+\mathbf{A}+\mathbf{C}$.

Когда физическая величина может быть выражена вектором? Мы ввели векторную систему обозначений для описания перемещений в пространстве, не обладающем кривизной. Помимо перемещений, имеются другие физические величины, подчиняющиеся тем же законам преобразования и обладающие теми же свойствами инвариантности, что и перемещения. Такие величины также можно выразить векторами. Чтобы величина выражалась вектором, она должна удовлетворять следующим двум условиям:

1. Для нее должен соблюдаться закон сложения по правилу параллелограмма.

2. Ее абсолютная величина и направление не должны зависеть от выбора системы координат.

Дифференцирование векторов. Скорость материальной точки $\mathbf{v}$ — вектор, ускорение $\mathbf{a}$ также является вектором. Скорость — это характеристика изменения положения материальной точки со временем. Положение материальной точки в любой момент времени t можно определить с помощью вектора $\mathbf{r}(t)$, который соединяет с данной точкой определенную неподвижную точку O, называемую началом отсчета. С течением времени материальная точка движется, а вектор, характеризующий ее положение, изменяется по направлению и по величине (рис. 2.6). Разность между $\mathbf{r}(t_2)$ и $\mathbf{r}(t_1)$ — это разность двух векторов:

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_2)-\mathbf{r}(t_1), \qquad (3)$$

и она сама является вектором. Если вектор $\mathbf{r}$ можно рассматривать как функцию (векторную функцию) одной скалярной переменной t, то значение $\Delta\mathbf{r}$ будет полностью определено, когда известны оба значения t_1 и t_2. Так, на рис. 2.7,*а* $\Delta\mathbf{r}$ — это хорда P_1P_2. Отношение

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

является вектором, коллинеарным с хордой P_1P_2 (рис. 2.7,*б*), но увеличенным по сравнению с нею в $1/\Delta t$ раз. Если Δt стремится

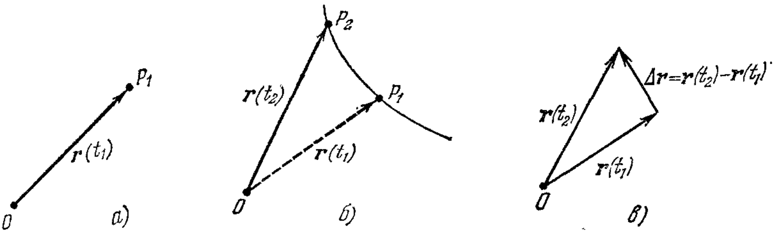

Рис. 2.6. а) Положение P_1 материальной точки относительно фиксированного начала отсчета задается в момент времени t_1 вектором $\mathbf{r}(t_1)$. *б*) К моменту t_2 материальная точка достигла положения P_2. *в*) Вектор $\Delta\mathbf{r}$ представляет собой разность между $\mathbf{r}(t_2)$ и $\mathbf{r}(t_1)$.

к нулю, то P_2 приближается к P_1, а хорда P_1P_2 в пределе стремится к касательной в точке P_1. Тогда вектор $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ стремится к $d\mathbf{r}/dt$, вектору, направленному по касательной к кривой в точке P_1 в ту же сторону, в которую увеличивается вдоль кривой переменная t.

Вектор

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{4}$$

называется *производной по времени* от $\mathbf{r}$. По определению скорость материальной точки равна

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{5}$$

Абсолютная величина $v=|\mathbf{v}|$ вектора скорости называется числовым значением скорости материальной точки. Числовое значение скорости — скаляр.

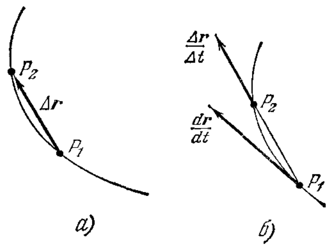

Рис. 2.7. *а*) $\Delta\mathbf{r}$ — это хорда, соединяющая точки P_1 и P_2 траектории, описываемой данной материальной точкой. *б*) Если $t_2 - t_1 = \Delta t \longrightarrow 0$, то вектор $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, коллинеарный с хордой P_1P_2, стремится к вектору скорости $d\mathbf{r}/dt$, коллинеарному с касательной к траектории в точке P_1.

Ускорение тоже представляет собой вектор; оно связано со скоростью $\mathbf{v}$ точно так же, как $\mathbf{v}$ связана с $\mathbf{r}$. Отсюда следует такое определение ускорения:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{6}$$

Рассмотрим движущуюся материальную точку. Положение ее в любой момент времени t задается радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$. Мы можем написать:

$$\mathbf{r}(t)=r(t)\hat{\mathbf{r}}(t), \tag{7}$$

где скаляр $r(t)$ — это длина радиуса-вектора, а $\hat{\mathbf{r}}(t)$ — единичный вектор направления $\mathbf{r}$. Согласно определению производной вектора $\mathbf{r}(t)$ она равна

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)\,\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t)-r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t}. \tag{8}$$

Преобразуем числитель дроби и получим следующее выражение:

$$\left[r(t)+\frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{\mathbf{r}}(t)+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\Delta t\right]-r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)=$$

$$=\Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)+(\Delta t)^2\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{9}$$

В пределе при $\Delta t\to 0$ пренебрегаем последним слагаемым в правой части и получаем

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{10}$$

Это пример применения общего правила дифференцирования произведения скаляра $a(t)$ на вектор $\mathbf{b}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{b})=\frac{da}{dt}\mathbf{b}+a\frac{d\mathbf{b}}{dt}. \tag{11}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (10) выражает изменение направления вектора $\mathbf{r}$; первое слагаемое обусловлено изменением длины r этого вектора.

Пример. Круговое движение. Этот пример исключительно важен! Наша цель — получить точные выражения для векторов скорости и ускорения материальной точки, движущейся с постоянной по абсолютной величине скоростью по круговой траектории постоянного радиуса r. Круговую траекторию можно описать таким уравнением:

$$\mathbf{r}(t)=r\hat{\mathbf{r}}(t), \tag{12}$$

в котором абсолютная величина r постоянна, а единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}$ вращается относительно начала отсчета с постоянной скоростью. Выразим такой единичный вектор следующим образом:

$$\hat{\mathbf{r}}(t)=\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t+\hat{\mathbf{y}}\sin\omega t, \tag{13}$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — взаимно перпендикулярные постоянные единичные векторы, а ω — постоянная величина, называемая *угловой частотой* или *угловой скоростью* движения. Эта величина измеряется в радианах на единицу времени. Вектор $\hat{\mathbf{r}}$ вращается против часовой стрелки, если величина ω положительна, и за время t поворачивается на угол ωt радиан относительно направления x. Напомним, что в 360° содержится 2π радиан. Эти утверждения относительно единичного вектора $\hat{\mathbf{r}}$ непосредственно следуют из определений тригонометрических функций косинуса и синуса. Заметим, что при $t=0$ единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}$ направлен вдоль оси x.

В качестве иллюстрации возьмем такое значение времени, для которого $\omega t = {}^1/_4\pi$ радиан, т. е. угол ωt равен 45°. Мы знаем, что $\cos {}^1/_4\pi = \sin {}^1/_4\pi = \sqrt{2}/2$, так что в этом случае

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{y}} \tag{14}$$

т. е. при $\omega t = {}^1/_4\pi$ единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}$ направлен относительно оси x под углом 45°, отсчитанным против часовой стрелки. В более поздний момент времени, для которого угол $\omega t = {}^1/_2\pi$ радиан (т. е. 90°), мы получим $\cos {}^1/_2\pi = 0$, $\sin {}^1/_2\pi = 1$, так что

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{y}}. \tag{15}$$

Теперь единичный вектор направлен по оси y.

Для того чтобы получить значение вектора скорости материальной точки, движущейся по окружности, мы используем формулу (10), но при этом $dr/dt=0$, так как радиус r окружности постоянен. Тогда из (12) и (13) следует:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = r\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{d}{dt}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\frac{d}{dt}\sin\omega t\right). \tag{16}$$

Определим производные от синуса и косинуса. Вспомним из курса математического анализа, что

$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t, \qquad \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t, \qquad \frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\omega t. \tag{18}$$

Если эти формулы не были известны вам ранее, попробуйте их вывести *).

---

*) *Производная от* $\sin t$ *по* t *определяется обычным способом,* т. е.

$$\frac{d}{dt}\sin t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin t\cos\Delta t+\cos t\sin\Delta t-\sin t}{\Delta t},$$

где мы используем известное тригонометрическое тождество:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

Но из геометрических определений косинуса и синуса очевидно, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\cos\Delta t = 1, \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta t}{\Delta t} = 1.$$

Подставляя эти результаты в формулу, полученную выше, имеем

$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t.$$

Аналогичным способом читатель может получить формулу (18) для $\frac{d}{dt}\cos t$.

С помощью формул (17) и (18) можно переписать равенство (16) в следующем виде:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=r(-\omega\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}}+\omega\cos\omega t\cdot\hat{\mathbf{y}}). \qquad (19)$$

Абсолютная величина скорости равна ωr. В этом можно убедиться, вычислив v^2 (используя определение скалярного произведения векторов, данное ниже в уравнении (28), а также равенство $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=0$):

$$v^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\omega^2r^2(-\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}}+\cos\omega t\cdot\hat{\mathbf{y}})\cdot(-\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}}+\cos\omega t\cdot\hat{\mathbf{y}})=$$
$$=\omega^2r^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=\omega^2r^2. \qquad (20)$$

Здесь мы использовали тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\equiv 1$. Таким образом, получен важный результат, согласно которому числовое значение скорости материальной точки при равномерном круговом движении равно

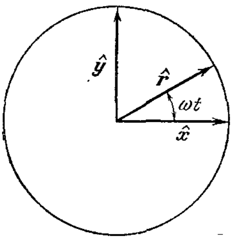

Рис. 2.8. Материальная точка движется по окружности единичного радиуса с угловой скоростью ω. Скорость материальной точки определяется по формуле (19), а ее ускорение — по формуле (22).

$$\boxed{v=\omega r.} \qquad (21)$$

Ускорение при круговом движении можно найти, продифференцировав по t правую часть формулы (19):

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=r(-\omega^2\cos\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}}-\omega^2\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{y}}). \qquad (22)$$

Сравнивая этот результат с (12) и (13), мы видим, что правая часть равенства (22) равна $-\omega^2\mathbf{r}$:

$$\mathbf{a}=-\omega^2r(\cos\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}}+\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{y}})=-\omega^2\mathbf{r}. \qquad (23)$$

Следовательно, числовое значение ускорения при равномерном круговом движении равно

$$\boxed{a=\omega^2r,} \qquad (24)$$

причем ускорение направлено, как $-\mathbf{r}$, т. е. к центру круга. Подставив из (21) $v=\omega r$, перепишем (24) в таком виде:

$$\boxed{a=\frac{v^2}{r}.} \qquad (25)$$

Это ускорение называется *центростремительным ускорением*, известным вам из курса физики средней школы.

Угловая частота ω связана простой зависимостью с обычной частотой f. Согласно уравнению (13) вектор $\hat{\mathbf{r}}$ описывает за единицу времени угол в ω радиан, т. е. числовое значение ω равняется выраженной в радианах величине угла, описанного за единицу времени. Но обычная частота f по определению равна числу оборотов, совершенных за единицу времени. Поскольку при одном обороте описывается полный угол, равный 2π радиан, получаем

$$\boxed{2\pi f = \omega.} \tag{26}$$

Период кругового движения T определяется как время, в течение которого совершается один оборот. Из уравнения (13) видно, что один оборот совершается за такое время T, что $\omega T = 2\pi$, или

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.} \tag{27}$$

Для иллюстрации приведем числовой пример, в котором частота f равна 60 *об/сек*. Тогда период равен

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} \cong 0{,}017 \ \textit{сек},$$

а угловая частота

$$\omega = 2\pi f \cong 378 \ \textit{рад/сек}.$$

Если радиус окружности равен 10 *см*, то линейная скорость движения равна

$$v = \omega r \cong 387 \cdot 10 \approx 3{,}8 \cdot 10^3 \ (\textit{см/сек}).$$

Ускорение в любой точке этой траектории равно

$$a = \omega^2 r \approx (3{,}8 \cdot 10^2)^2 \cdot 10 \approx 1{,}45 \cdot 10^6 \ (\textit{см/сек}^2).$$

В гл. 3 рассматривается числовой пример, который показывает, что точка, находящаяся на поверхности Земли на ее экваторе, имеет ускорение около 3,4 *см/сек*^{2} вследствие вращения Земли вокруг оси.

Из определений $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ следует, что все эти величины являются векторами. Сила $\mathbf{F}$, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ также являются векторами; чтобы доказать это, мы должны на основании опытных данных убедиться, что они обладают свойствами, необходимыми для векторов.

Опыт показывает, что сила $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$, где масса M — постоянный скаляр *). Поскольку $\mathbf{a}$ — это вектор, сила тоже должна быть вектором. Напряженность электрического поля определяется как сила, которая действует на неподвижную частицу с единичным зарядом, находящуюся в электрическом поле; таким образом, и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ должна быть вектором. Опытным путем установлено, что магнитные поля складываются по закону сложения векторов: совместное действие полей с магнитной индукцией $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$

---

*) Если масса M не постоянна, то

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\mathbf{a}.$$

в точности равносильно действию одного магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2$, т. е. индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ также является вектором.

Не все величины, которые имеют числовое значение и направление, обязательно являются векторами. Например, повороту твердого тела вокруг определенной оси, неподвижной в пространстве,

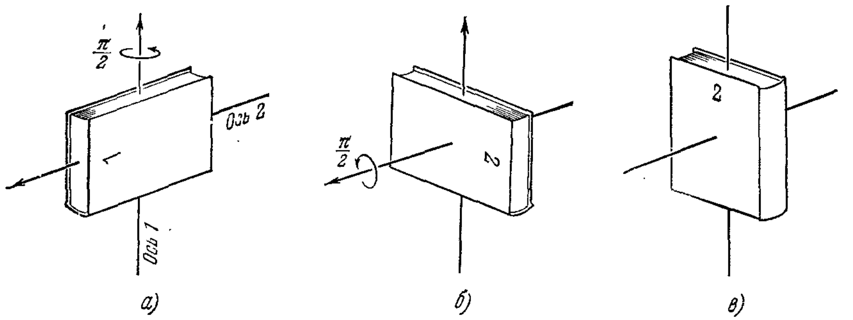

Рис. 2.9. *а*) Исходное положение книги. *б*) Положение книги после поворота на $\pi/2$ радиан вокруг оси 1. *в*) Положение книги после последующего поворота на $\pi/2$ радиан вокруг оси 2. *1* — передняя часть обложки; *2* — задняя часть обложки.

можно приписать как числовое значение (величина угла поворота), так и направление (направление оси). Однако два таких поворота не складываются согласно закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми. Это легко видеть, когда две оси перпендикулярны друг к другу, а оба угла поворота

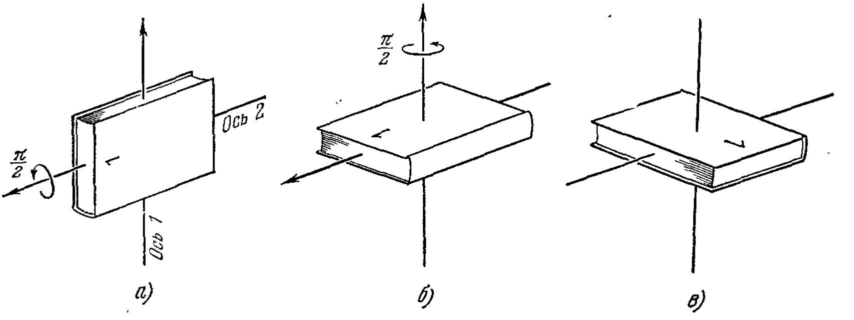

Рис. 2.10. *а*) Исходное положение книги. *б*) Положение книги после поворота на $\pi/2$ радиан вокруг оси 2. *в*) Положение книги после последующего поворота на $\pi/2$ радиан вокруг оси 1.

равны по $\pi/2$ каждый. Представим себе какой-либо предмет, например книгу (рис. 2.9, *а*). Поворот (1) переводит ее в положение, показанное на рис. 2.9, *б*, а последующий поворот (2) вокруг другой оси — в положение на рис. 2.9, *в*. Однако если вернуть предмет в первоначальное положение и сначала произвести поворот (2), а затем поворот (1), то в конце концов этот предмет окажется в положении, показанном на рис. 2.10, *в*. Ориентация предмета на рис. 2.10, *в* отличается от ориентации на рис. 2.9, *в*. Очевидно, что для этих поворотов не выполняется закон коммутативности сложения. Повороты на конечный угол нельзя выразить векторами, хотя их можно охарактеризовать числовым значением и направлением.

2.2. Произведения векторов. Скалярное произведение двух векторов

Известны два вида произведений двух векторов, широко используемые в физике. Для обоих видов произведений векторов выполняется распределительный (дистрибутивный) закон умножения: произведение вектора **A** на сумму векторов **B**+**C** равно сумме произведений **A** на **B** и **A** на **C**. Одно из этих произведений двух векторов

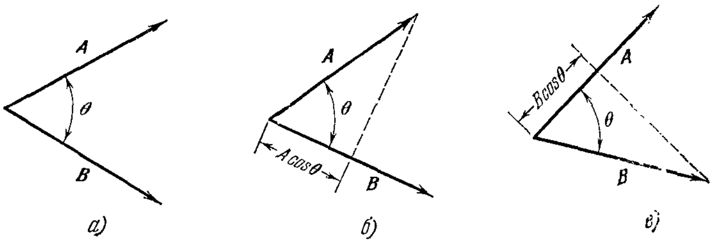

Рис. 2.11. *а*) Для образования скалярного произведения **A**·**B** приведем векторы **A** и **B** к общей начальной точке. *б*) $B\,(A\cos\theta)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. *в*) $A\,(B\cos\theta)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Здесь буквой θ обозначен угол между векторами **A** и **B**.

представляет собой скаляр, другое (также применяемое для многих целей) является вектором. В принципе возможно дать определение операции умножения двух векторов еще и другими способами, но эти способы не применяются, так как для них не выполняется распределительный закон. Например, нельзя считать, что число AB, т. е. обычное числовое произведение $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ абсолютных величин векторов **A** и **B**, является произведением этих векторов: легко заметить, что если $\mathbf{D}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$, то в общем случае $AD\neq AB+AC$. Это отсутствие дистрибутивности делает число AB непригодным в качестве произведения векторов **A** и **B**.

По определению скалярное произведение двух векторов **A** и **B** — это число, получаемое умножением абсолютной величины **A** на абсолютную величину **B** и на косинус угла между этими векторами (рис. 2.11). Операция скалярного умножения двух векторов обозначается точкой между символами сомножителей:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\equiv AB\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B}).} \qquad (28)$$

Здесь $\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ обозначает косинус угла между векторами **A** и **B**. Очевидно, что определение скалярного произведения совсем не связано с системой координат, т. е. скалярное произведение векторов представляет собой скаляр. Заметим, что $\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B})=\cos(\mathbf{B},\ \mathbf{A})$,