отличается от ориентации на рис. 2.9, *в*. Очевидно, что для этих поворотов не выполняется закон коммутативности сложения. Повороты на конечный угол нельзя выразить векторами, хотя их можно охарактеризовать числовым значением и направлением.

2.2. Произведения векторов. Скалярное произведение двух векторов

Известны два вида произведений двух векторов, широко используемые в физике. Для обоих видов произведений векторов выполняется распределительный (дистрибутивный) закон умножения: произведение вектора **A** на сумму векторов **B**+**C** равно сумме произведений **A** на **B** и **A** на **C**. Одно из этих произведений двух векторов

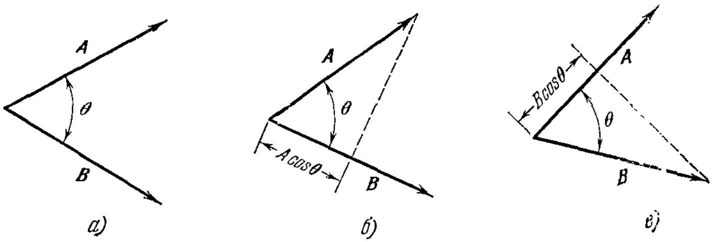

Рис. 2.11. *а*) Для образования скалярного произведения **A**·**B** приведем векторы **A** и **B** к общей начальной точке. *б*) $B(A\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. *в*) $A(B\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Здесь буквой θ обозначен угол между векторами **A** и **B**.

представляет собой скаляр, другое (также применяемое для многих целей) является вектором. В принципе возможно дать определение операции умножения двух векторов еще и другими способами, но эти способы не применяются, так как для них не выполняется распределительный закон. Например, нельзя считать, что число AB, т. е. обычное числовое произведение $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ абсолютных величин векторов **A** и **B**, является произведением этих векторов: легко заметить, что если $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, то в общем случае $AD \neq AB + AC$. Это отсутствие дистрибутивности делает число AB непригодным в качестве произведения векторов **A** и **B**.

По определению скалярное произведение двух векторов **A** и **B** — это число, получаемое умножением абсолютной величины **A** на абсолютную величину **B** и на косинус угла между этими векторами (рис. 2.11). Операция скалярного умножения двух векторов обозначается точкой между символами сомножителей:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B}).} \qquad (28)$$

Здесь $\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ обозначает косинус угла между векторами **A** и **B**. Очевидно, что определение скалярного произведения совсем не связано с системой координат, т. е. скалярное произведение векторов представляет собой скаляр. Заметим, что $\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B}) = \cos(\mathbf{B},\ \mathbf{A})$, и поэтому скалярное произведение коммутативно:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}. \tag{29}$$

Если угол, образованный векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, находится между $\pi/2$ и $3\pi/2$, то $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ будут отрицательными числами. Если $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, то $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})=1$ и

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A^2=|\mathbf{A}|^2. \tag{30}$$

Если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ и при этом $A\neq 0$ и $B\neq 0$, то мы говорим, что вектор $\mathbf{A}$ *ортогонален* вектору $\mathbf{B}$ или перпендикулярен вектору $\mathbf{B}$. Заметим, что $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})=\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}$, так что скалярное произведение двух единичных векторов в точности равно косинусу угла между ними. Величина проекции вектора $\mathbf{B}$ на направление вектора $\mathbf{A}$ равна

$$B\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})=B\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{A}}, \tag{31}$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ — единичный вектор направления $\mathbf{A}$. Проекция вектора $\mathbf{A}$ на направление вектора $\mathbf{B}$ равна

$$A\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{B}}. \tag{32}$$

Не существует действия, обратного скалярному умножению векторов: если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=b$, то это уравнение не имеет единственного решения для $\mathbf{X}$. Деление на вектор — это не имеющая смысла, неопределенная операция.

Рассмотрим некоторые применения скалярных произведений.

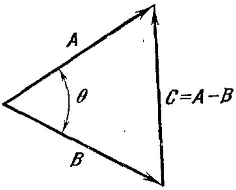

Рис. 2.12. $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=C^2=(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=A^2+B^2-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A^2+B-2AB\cos\theta$.

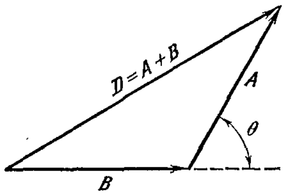

Рис. 2.13. $\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}=D^2=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=A^2+B^2+2AB\cos\theta$.

1. *Теорема косинусов.* Пусть $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}$; тогда, взяв скалярное произведение каждой части этого равенства на такую же величину, получаем

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}, \tag{33}$$

или

$$A^2+B^2-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=C^2, \tag{34}$$

что в точности соответствует общеизвестному тригонометрическому соотношению:

$$\boxed{A^2+B^2-2AB\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})=C^2.} \tag{35}$$

2. *Направляющие косинусы.* Пусть $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ — три ортогональных *) единичных вектора, которыми определяется прямоугольная декартова система координат. Произвольный вектор $\mathbf{A}$ можно выразить следующим образом (рис. 2.14):

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}})\,\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{y}})\,\hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{36}$$

Величины $(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}})$, $(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{y}})$ и $(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{z}})$ называются составляющими вектора $\mathbf{A}$ и часто обозначаются соответственно как A_x, A_y и A_z. Соотношение (36) можно проверить, помножив обе его части скалярно на $\hat{\mathbf{x}}$

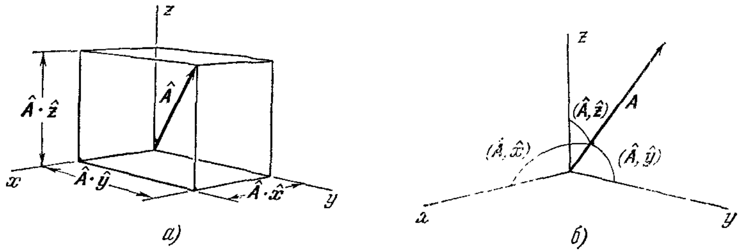

Рис. 2.14. *а)* Направляющие косинусы $\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{x}}$, показанные в виде проекций. *б)* Направляющие косинусы относятся к указанным углам.

и использовав соотношения $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 1$, $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = 0$, $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0$ (следующие из определения ортогональных единичных векторов). При этом получится тождество

$$\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{y}})(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{z}})(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}}. \tag{37}$$

Единичный вектор $\hat{\mathbf{A}}$ направления $\mathbf{A}$ можно согласно (36) выразить так:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}}\cos(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{y}}\cos(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{y}}) + \hat{\mathbf{z}}\cos(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{z}}). \tag{38}$$

Три косинуса, входящие в это равенство, называются *направляющими косинусами* вектора $\hat{\mathbf{A}}$ или направляющими косинусами вектора $\mathbf{A}$ относительно основных единичных векторов $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ прямоугольной декартовой системы координат. Взяв скалярное произведение каждой части равенства (38) на самое себя, получим другое известное соотношение:

$$\boxed{1 = \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{x}}) + \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{y}}) + \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{z}}).} \tag{39}$$

Сумма квадратов всех трех направляющих косинусов равна единице.

3. *Уравнение плоскости.* Обозначим через $\mathbf{N}$ вектор нормали к рассматриваемой плоскости, проведенный из начала координат

*) Слово «ортогональные» употребляется в смысле «взаимно перпендикулярные».

O, не находящегося в этой плоскости (рис. 2.15). Пусть $\mathbf{r}$ — вектор, идущий из начала координат O в какую-то произвольную точку плоскости P. Проекция $\mathbf{r}$ на $\mathbf{N}$ должна быть равна абсолютной величине N вектора нормали. Таким образом, плоскость описывается следующим уравнением:

$$\boxed{\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = N^2.} \tag{40}$$

Чтобы убедиться в равносильности этого компактного соотношения обычному уравнению плоскости в аналитической геометрии, выразим векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{r}$ соответственно через их составляющие N_x, N_y, N_z и x, y, z в прямоугольной декартовой системе координат, определенной ортогональными единичными векторами $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$. Тогда уравнение (40) принимает следующий вид:

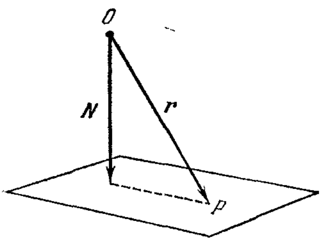

Рис. 2.15. Уравнение плоскости; $\mathbf{N}$ — вектор нормали к плоскости, идущий из начала отсчета O. Уравнение этой плоскости: $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} = N^2$.

$$(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})\cdot(N_x\hat{\mathbf{x}} + N_y\hat{\mathbf{y}} + N_z\hat{\mathbf{z}}) = N^2, \tag{41}$$

или

$$N_x x + N_y y + N_z z = N^2. \tag{42}$$

Если $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор в направлении распространения плоской электромагнитной волны в свободном пространстве, то (как мы увидим в т. III) векторы напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ должны находиться в плоскости, нормальной вектору $\hat{\mathbf{k}}$ (рис. 2.16). Это геометрическое условие мы можем выразить следующими соотношениями:

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E} = 0, \qquad \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{43}$$

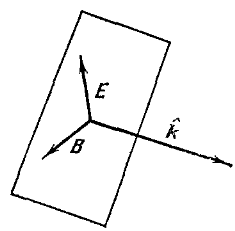

Рис. 2.16. Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в свободном пространстве, векторы электрического и магнитного полей перпендикулярны к направлению распространения $\hat{\mathbf{k}}$. Таким образом, $\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B} = 0$.

4. *Мощность* (*работа, совершаемая в единицу времени*). Из элементарного курса физики (см. также гл. 5) мы узнаем, что работа, которую сила $\mathbf{F}$ совершает в единицу времени над частицей, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, равна $Fv\cos(\mathbf{F}, \mathbf{v})$. В этом выражении мы теперь узнаем скалярное произведение:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

Если мы обозначим мощность, т. е. работу, совершаемую в единицу времени, как производную dW/dt, то

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.} \tag{44}$$

5. *Объемная скорость.* Пусть **S** — вектор, нормальный к плоской площадке, имеющей площадь, равную абсолютной величине S этого вектора, а через **v** обозначим скорость, с которой движется

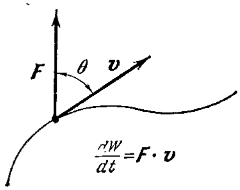

Рис. 2.17. Работа, которую сила **F** совершает в единицу времени над материальной точкой, движущейся со скоростью **v**.

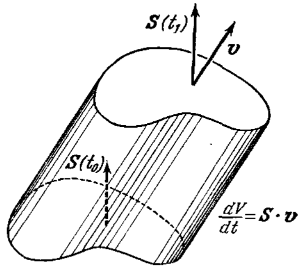

Рис. 2.18. Объемная скорость dV/dt, т. е. скорость, с которой площадка **S**, движущаяся со скоростью **v**, описывает объем, ограниченный цилиндрической поверхностью.

эта площадка. Мы видим, что за единицу времени площадка S опишет объем цилиндра с основанием S и длиной наклонной образующей v (рис. 2.18). Объемная скорость dV/dt, таким образом, равна

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}. \tag{45}$$

2.3. Векторное произведение

В физике широко применяется и другой вид произведения двух векторов. Это произведение является вектором, а не скаляром, но вектором в несколько ограниченном смысле. По определению

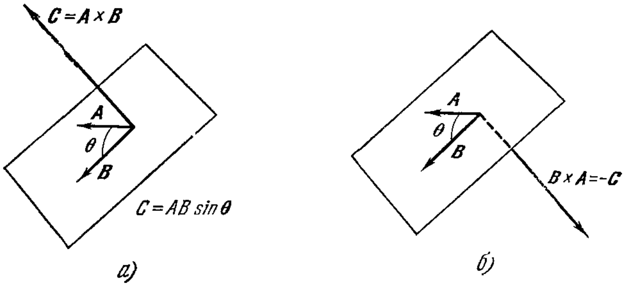

Рис. 2.19. *а*) Векторное произведение **C**=**A**×**B**. *б*) Векторное произведение **B**×**A** противоположно по знаку векторному произведению **A**×**B**.

векторное произведение — это вектор, нормальный к плоскости, образованной векторами-сомножителями **A** и **B**, и имеющий абсолютную величину $AB\,|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B})|$ (рис. 2.19):

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}AB\,|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B})|.} \tag{46}$$