5. *Объемная скорость.* Пусть **S** — вектор, нормальный к плоской площадке, имеющей площадь, равную абсолютной величине S этого вектора, а через **v** обозначим скорость, с которой движется

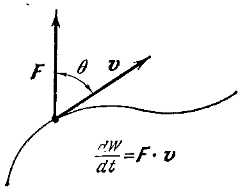

Рис. 2.17. Работа, которую сила **F** совершает в единицу времени над материальной точкой, движущейся со скоростью **v**.

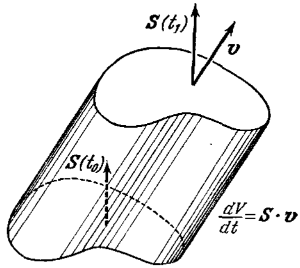

Рис. 2.18. Объемная скорость dV/dt, т. е. скорость, с которой площадка **S**, движущаяся со скоростью **v**, описывает объем, ограниченный цилиндрической поверхностью.

эта площадка. Мы видим, что за единицу времени площадка S опишет объем цилиндра с основанием S и длиной наклонной образующей v (рис. 2.18). Объемная скорость dV/dt, таким образом, равна

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}. \qquad (45)$$

2.3. Векторное произведение

В физике широко применяется и другой вид произведения двух векторов. Это произведение является вектором, а не скаляром, но вектором в несколько ограниченном смысле. По определению

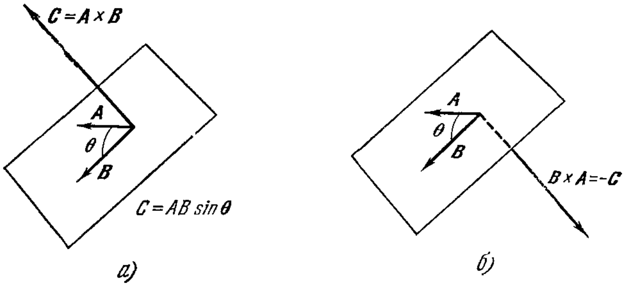

Рис. 2.19. *а*) Векторное произведение $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. *б*) Векторное произведение $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ противоположно по знаку векторному произведению $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

векторное произведение — это вектор, нормальный к плоскости, образованной векторами-сомножителями **A** и **B**, и имеющий абсолютную величину $AB\,|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B})|$ (рис. 2.19):

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}AB\,|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B})|.} \qquad (46)$$

Векторное произведение обозначается крестом между символами сомножителей: $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ *). Направление векторного произведения **C** по установленному соглашению определяется *правилом правого винта* (рис. 2.20): представим себе, что вектор **A**, находящийся на первом месте в произведении, поворачивается на наименьший угол таким образом, чтобы его направление совпало с направлением вектора **B**; векторное произведение **C** направлено в ту сторону, в которую двигался бы винт с правой резьбой (т. е. со стандартным направлением резьбы), если бы головка винта поворачивалась в том же направлении, что и вектор **A**.

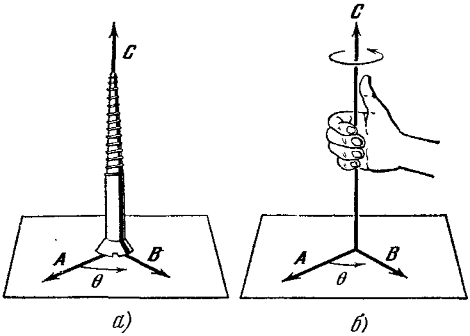

Рис. 2.20. *а*) Правило правого винта; *б*) то же правило, но в применении к правой руке.

Сформулируем иначе правило определения направления вектора **C**. Сначала совместим начальные точки векторов **A** и **B** — это позволит определить их плоскость. Вектор **C** перпендикулярен к этой плоскости; это значит, что векторное произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ перпендикулярно как к вектору **A**, так и к вектору **B**. Повернем **A** до совмещения с направлением **B** на меньший из двух возможных углов и загнем четыре пальца правой руки в том направлении, в котором поворачивается вектор **A**; тогда большой палец покажет нам, куда направлен вектор $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Заметим, что в силу этого соглашения о знаке произведения $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ является вектором, равным по абсолютной величине и противоположным по знаку вектору $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}. \qquad (47)$$

Таким образом, векторное произведение некоммутативно. Из (47) следует, что $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$, т. е. что векторное произведение любого вектора на самого себя равно нулю. Для векторного произведения выполняется распределительный (дистрибутивный) закон:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}. \qquad (48)$$

*) Часто векторное произведение обозначается квадратными скобками: **[A B]**. (*Прим. ред.*)

Несколько громоздкое доказательство этого тождества можно найти в любой книге по векторному анализу или аналитической геометрии.

Ниже мы рассмотрим некоторые применения векторных произведений.

1. *Площадь параллелограмма* (рис. 2.21). Абсолютная величина векторного произведения

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB\,|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})| \tag{49}$$

равняется площади параллелограмма со сторонами **A** и **B** (или удвоенной площади треугольника со сторонами **A** и **B**). Направление вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ перпендикулярно к плоскости параллелограмма, поэтому мы можем считать $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ *вектором площади* параллелограмма. Поскольку мы приписали определенные направления сторонам **A** и **B**, вектор площади также получает направление. Имеются физические приложения, где удобно приписывать площади определенное направление.

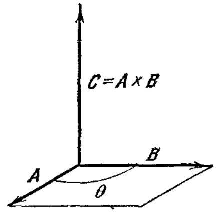

Рис. 2.21. Вектор площади параллелограмма равен $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\times|\sin\theta|\,\hat{\mathbf{C}}$.

2. *Объем параллелепипеда*. Скаляр

$$\boxed{|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}|=V} \tag{50}$$

представляет собой объем параллелепипеда с площадью основания $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и боковым ребром **C**. Если три вектора **A**, **B** и **C** лежат в одной плоскости, то объем этого параллелепипеда

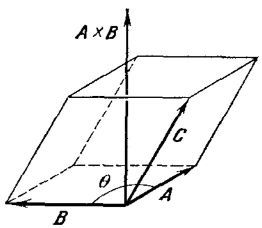

Рис. 2.22. $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ равно произведению площади основания на высоту, т. е. равно объему параллелепипеда.

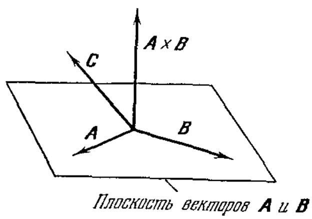

Рис. 2.23. **A**, **B**, **C** — три вектора. Вектор $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ перпендикулярен к плоскости, образованной векторами **A** и **B**.

будет равен нулю; следовательно, три вектора компланарны *) тогда и только тогда, когда $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=0$.

Рассматривая рис. 2.22, можно установить, что

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}, \tag{51}$$

т. е. *в тройном скалярном произведении векторов можно менять местами знаки скалярного и векторного умножений, не изменяя*

*) Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости. (*Прим. ред.*)

величину произведения. Однако

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}). \tag{52}$$

Величина тройного скалярного произведения не изменяется при циклической перестановке порядка векторов, но меняет знак, если нарушается циклический порядок векторов. Циклическими перестановками для ABC будут BCA и CAB; антициклическими перестановками для ABC будут BAC, ACB и CBA.

3. *Теорема синусов*. Рассмотрим треугольник из векторов, определяемых равенством $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, и помножим векторно на $\mathbf{A}$ обе части этого равенства:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \tag{53}$$

Но $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$, а абсолютные величины обеих частей равенства (53) должны быть одинаковыми, т. е.

$$AC\,|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{C})| = AB\,|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B})|, \tag{54}$$

или

$$\frac{\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{C})}{B} = \frac{\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B})}{C}. \tag{55}$$

Это равенство представляет собой тригонометрическую теорему синусов.

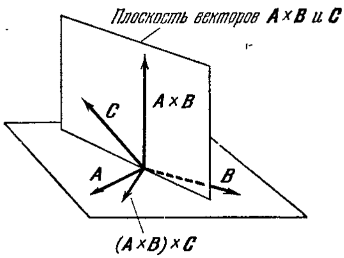

Рис. 2.24. Вектор $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ перпендикулярен к плоскости векторов $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$; он лежит в плоскости векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

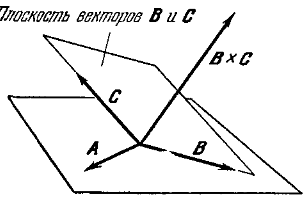

Рис. 2.25. Вектор $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ перпендикулярен к плоскости векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$.

4. *Тройные произведения векторов*. Возможны два вида тройных произведений, являющихся векторами. Вектор

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C} \tag{56}$$

— это попросту произведение вектора $\mathbf{C}$ на скаляр $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Другое тройное произведение называется *тройным векторным произведением* и имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \tag{57}$$

т. е. оно является вектором, перпендикулярным к $\mathbf{A}$ и к $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Поскольку вектор $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ перпендикулярен к плоскости, образованной векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то вектор $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ должен находиться в плоскости векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Подобное же рассуждение приводит к тому, что произведение

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \tag{58}$$

представляет собой вектор, лежащий в плоскости, образованной векторами **A** и **B** и перпендикулярной к **C**. Ясно, что (57) и (58) — это разные величины, т. е. положение скобок имеет существенное значение.

Можно выразить тройное векторное произведение как сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \tag{59}$$

Доказательство этого важного соотношения приводится в руководствах по векторному анализу.

5. *Сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле.* Сила, действующая на точечный электрический заряд в магнитном поле с индукцией **B**, пропорциональна составляющей

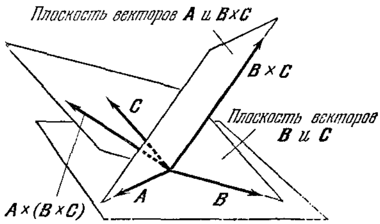

Рис. 2.26. Вектор $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ перпендикулярен к плоскости векторов **A** и $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$; он находится в плоскости векторов **B** и **C**. Очевидно, что $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ и $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ — это различные векторы.

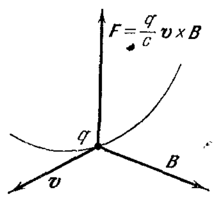

Рис. 2.27. Сила, действующая на положительный заряд q в магнитном поле.

вектора **B**, перпендикулярной к скорости **v**, с которой движется этот заряд. Это соотношение легко можно выразить в форме векторного произведения:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(в гауссовой системе единиц)} \tag{60}$$

или

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(в системе СИ)}. \tag{61}$$

Здесь q — заряд частицы, а c — скорость света (рис. 2.27).

Этот закон действия силы подробно рассматривается в т. II.

2.4. Векторы в декартовой системе координат

Выражение физических законов в векторной форме отличается изяществом и лаконичностью. Однако в конечном счете мы должны количественно оценить следствия применения этих законов к конкретным физическим условиям. При этом полезно перейти от векторов к определенным системам координат, из которых наиболее