произведение

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \qquad (58)$$

представляет собой вектор, лежащий в плоскости, образованной векторами **A** и **B** и перпендикулярной к **C**. Ясно, что (57) и (58) — это разные величины, т. е. положение скобок имеет существенное значение.

Можно выразить тройное векторное произведение как сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \qquad (59)$$

Доказательство этого важного соотношения приводится в руководствах по векторному анализу.

5. *Сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле.* Сила, действующая на точечный электрический заряд в магнитном поле с индукцией **B**, пропорциональна составляющей

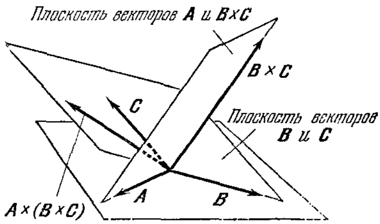

Рис. 2.26. Вектор $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ перпендикулярен к плоскости векторов **A** и $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$; он находится в плоскости векторов **B** и **C**. Очевидно, что $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ и $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ — это различные векторы.

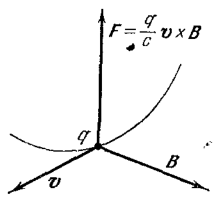

Рис. 2.27. Сила, действующая на положительный заряд q в магнитном поле.

вектора **B**, перпендикулярной к скорости **v**, с которой движется этот заряд. Это соотношение легко можно выразить в форме векторного произведения:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ (в гауссовой системе единиц)} \qquad (60)$$

или

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ (в системе СИ)}. \qquad (61)$$

Здесь q — заряд частицы, а c — скорость света (рис. 2.27).

Этот закон действия силы подробно рассматривается в т. II.

2.4. Векторы в декартовой системе координат

Выражение физических законов в векторной форме отличается изяществом и лаконичностью. Однако в конечном счете мы должны количественно оценить следствия применения этих законов к конкретным физическим условиям. При этом полезно перейти от векторов к определенным системам координат, из которых наиболее удобной является декартова система. Из-за своей особенной простоты эта система координат чаще всего применяется в физике. Она определяется заданием любой тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$. Если мы их напишем на доске, не указав стрелками, что это векторы, то это не приведет к недоразумению. Некоторые авторы предпочитают обозначать эти единичные векторы через $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ и $\hat{\mathbf{k}}$. Направление $\hat{\mathbf{z}}$ относительно $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ определяется правилом правого винта, указанным выше в связи с определением векторного произведения. Согласно этому правилу

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}. \tag{62}$$

Условимся пользоваться только правовинтовыми системами координат. Как мы сообщили бы наше определение правого винта

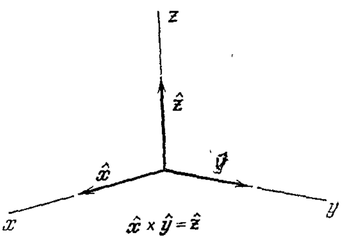

Рис. 2.28. Единичные векторы $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ декартовой ортогональной системы координат.

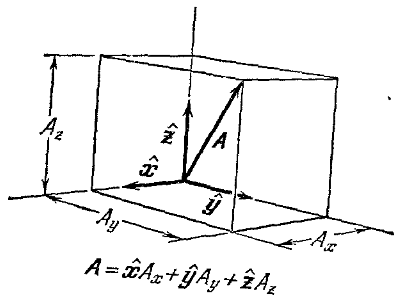

Рис. 2.29

разумному существу, находящемуся в другой Солнечной системе нашей Галактики? Мы можем это сделать с помощью поляризованных по кругу радиоволн *). Радиосигнал несет информацию, которая сообщает удаленному наблюдателю, как мы задали направление круговой поляризации радиоволн. Этот удаленный наблюдатель должен располагать двумя приемниками, один из которых реагирует на данное направление круговой поляризации сигнала, а другой — на ее противоположное направление. Подобная однозначность в определении направления вращения вектора необходима для любого метода: так, например, первоначально Зееман при анализе спектрального эффекта, впоследствии названного эффектом Зеемана, неправильно определил направление круговой поляризации света и из-за этого сделал ошибочный вывод, что в атомах колеблющиеся заряды имеют положительный знак **).

*) Круговая поляризация рассматривается в т. III («Волны»).

Если два гармонических колебания равной амплитуды совершаются в одной плоскости по взаимно перпендикулярным направлениям (оси x и y) при разности фаз, равной $\pi/2$, то результатом их сложения является окружность. (*Прим. ред.*)

) См. P. Z e e m a n, Philosophical Magazine, ser. 5, **43, 55 and 226 (1897). По подобной же причине 11 июля 1962 г. первая передача со спутника «Тельстар»

Инвариантность величины A^2 по отношению к повороту системы отсчета.

Любой вектор **A** можно выразить так (рис. 2.29):

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}. \qquad (63)$$

Здесь A_x, A_y, A_z — проекции вектора **A** на соответствующие координатные оси. Таким образом,

$$A_x = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}} = A\cos(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{x}}), \qquad (64)$$

и аналогично для A_y и A_z. Мы будем иногда обозначать вектор **A** в виде тройки чисел (A_x, A_y, A_z). Для квадрата вектора **A** мы получаем такое равенство:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \qquad (65)$$

Предположим, что мы оставляем направление вектора **A** неизменным и поворачиваем систему отсчета с осями координат вокруг начала координат, получая при этом новую тройку ортогональных единичных векторов $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$. В новой системе координат составляющие вектора **A** будут равны $A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$:

$$\mathbf{A} = A_{x'}\hat{\mathbf{x}}' + A_{y'}\hat{\mathbf{y}}' + A_{z'}\hat{\mathbf{z}}'. \qquad (66)$$

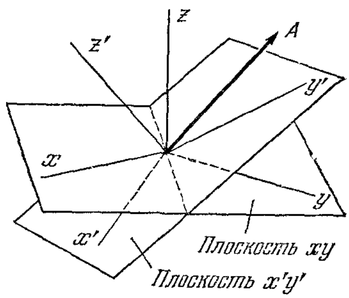

Рис. 2.30. Вектор **A** можно выразить в системе координат x, y, z или в системе координат x', y', z', полученной из x, y, z путем произвольного поворота. Мы говорим, что A^2 является инвариантной формой по отношению к повороту. Это означает, что $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2$.

Нетрудно представить себе направление вектора **A** неизменным — мы оставляем вектор **A** неподвижным относительно неподвижных звезд или, что еще удобнее, относительно этой напечатанной страницы. Новая система отсчета поворачивается относительно старой. Длина отрезка A должна быть независимой от ориентации системы отсчета; следовательно, величина A^2, рассчитанная исходя из уравнения (66), должна быть тождественной величине A^2 в уравнении (65):

$$A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \qquad (67)$$

Это первый встретившийся нам пример *инвариантной формы* *). Формула, выражающая абсолютную величину вектора, одна и та же во всех декартовых системах координат, отличающихся друг от

плохо принималась в Англии из-за «... обращения фазы малой составляющей в антенне, причиной которого было неправильное определение направления круговой поляризации радиоволн» («Таймс», 13 июля 1962 г., стр. 11).

*) Дирак писал: «Величины, соответствующие важным понятиям в природе, являются инвариантами этих преобразований (или, в более общем случае, «квазиинвариантами», или величинами, которые преобразуются по простым правилам)» (П. А. М. Д и р а к, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960, стр. 12).

друга жестким поворотом осей координат. Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{68}$$

представляет собой другой пример инвариантной формы, как это очевидно из его геометрического определения через проекции.

Векторное произведение, как следует из его геометрического определения, представляет собой еще одну инвариантную форму. Векторное произведение выражается через декартовы координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}})=\\&=A_xB_y(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}})+A_xB_z(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}})+A_yB_x(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}})+\\&\quad+A_yB_z(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}})+A_zB_x(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})+A_zB_y(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}}),\end{aligned} \tag{69}$$

где мы использовали соотношение $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}}=0$ и т. п. Но из определения векторного произведения очевидно, что

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}},\qquad \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{x}},\qquad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}. \tag{70}$$

Заметьте, что в каждое произведение единичные векторы входят в порядке xyz или в его циклической перестановке. Если изменить порядок сомножителей, то меняется знак произведения, потому что такое изменение приводит к перестановке, антициклической относительно xyz:

$$\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}}=-\hat{\mathbf{z}},\quad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}},\quad \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}=-\hat{\mathbf{y}}. \tag{71}$$

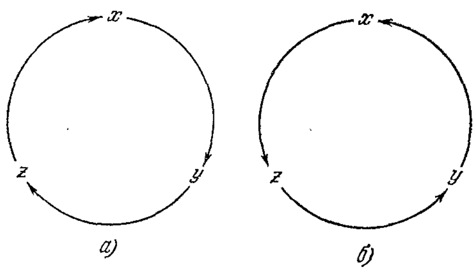

Рис. 2.31. *а*) Циклический порядок xyz. *б*) Антициклический порядок xyz.

С учетом этих соотношений равенство (69) принимает следующий вид:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{\mathbf{y}}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{\mathbf{z}}(A_xB_y-A_yB_x). \tag{72}$$

Обратите внимание, что в правую часть формулы (72) входят со знаком плюс те слагаемые, в которых буквы x, y, z в обозначениях единичных векторов и индексах при A и B расположены в порядке xyz или в его циклической перестановке; в противоположном случае, т. е. для перестановки, антициклической относительно xyz, получается минус. Если вы знакомы с определителями, то вы легко можете проверить, что следующая формула:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}, \tag{73}$$

эквивалентна формуле (72) и притом легче запоминается.

Примеры. Различные элементарные действия с векторами. Рассмотрим следующий вектор (рис. 2.32):

$$\mathbf{A}=3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}}.$$

а) Найти длину вектора **A**. Определим A^2:

$$A^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=3^2+1^2+2^2=14,$$

откуда следует, что $A=\sqrt{14}$ — это длина вектора **A**.

б) Какова длина проекции вектора **A** на плоскость xy? Вектор, являющийся проекцией **A** на плоскость xy,— это $3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$; квадрат длины этого вектора равен $3^2+1^2=10$.

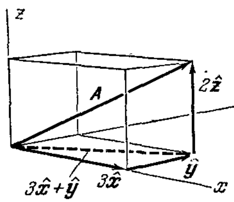

Рис. 2.32. Вектор $\mathbf{A}=3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}}$ и его проекция на плоскость xy.

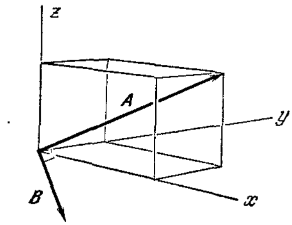

Рис. 2.33. Вектор **B** находится в плоскости xy и перпендикулярен к вектору **A**.

в) Построить вектор, лежащий в плоскости xy и перпендикулярный к вектору **A** (рис. 2.33). Запишем в виде

$$\mathbf{B}=B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}$$

вектор **B**, обладающий свойством $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$, или

$$(3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}})=0.$$

Вычислив скалярное произведение, находим, что

$$3B_x+B_y=0,$$

или

$$B_y/B_x=-3.$$

Длина вектора **B** не определяется условиями задачи.

г) Построить единичный вектор $\hat{\mathbf{B}}$. Для этого вектора $\hat{B}_x^2+\hat{B}_y^2=1$, или

$$\hat{B}_x^2(1^2+3^2)=1=10\hat{B}_x^2.$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{B}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\mathbf{x}}-\frac{3}{\sqrt{10}}\hat{\mathbf{y}}=\frac{\hat{\mathbf{x}}-3\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}}.$$

д) Найти скалярное произведение вектора **A** на вектор $\mathbf{C}=2\hat{\mathbf{x}}$. Можно непосредственно убедиться, что оно равно $2\cdot3=6$.

е) Выразить векторы **A** и **C** в системе отсчета, полученной из старой системы отсчета поворотом на $\pi/2$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления оси z. Новые единичные векторы $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ связаны со старыми $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ следующими соотношениями:

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}}, \qquad \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}}, \qquad \hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}.$$

Все $\hat{\mathbf{x}}$ заменяем на $-\hat{\mathbf{y}}'$; $\hat{\mathbf{y}}$ заменяем на $\hat{\mathbf{x}}'$, таким образом,

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}' - 3\hat{\mathbf{y}}' + 2\hat{\mathbf{z}}', \qquad \mathbf{C} = -2\hat{\mathbf{y}}'.$$

ж) Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, когда эти векторы выражены в штрихованной системе координат. По результатам

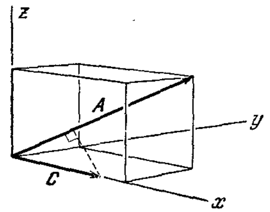

Рис. 2.34. Проекция вектора $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$ на вектор **A**.

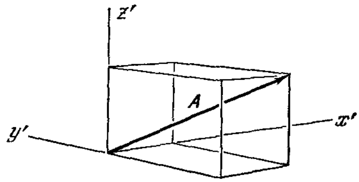

Рис. 2.35. Штрихованная система отсчета x', y', z' получена из нештрихованной системы x, y, z поворотом на угол $\pi/2$ вокруг оси z.

предыдущего пункта получим $(-3)\cdot(-2)=6$, точно так же, как и в нештрихованной системе.

з) Найти векторное произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$. В нештрихованной системе оно равно

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}.$$

Образуя скалярные произведения, можно убедиться, что этот вектор перпендикулярен как к **A**, так и к **C**.

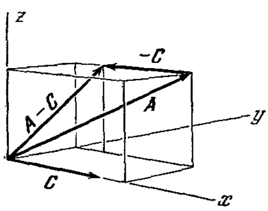

Рис. 2.36. Вектор **A**−**C**.

и) Рассчитать вектор **A** — **C** (рис. 2.36). Получаем

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3-2)\,\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}.$$

Запись в виде векторного произведения особенно удобна для выражения угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела. Мы видели, что повороты на конечный угол не являются векторами, потому что два таких поворота не подчиняются закону сложения векторов. Но угловая скорость, по определению, представляет собой предел отношения бесконечно малого угла поворота к бесконечно малому интервалу времени, за который происходит этот поворот. Порядок, в котором совершаются два бесконечно малых поворота, не влияет на окончательное положение предмета, если исключить слагаемые такого же порядка малости, как квадрат величины бесконечно малых поворотов, а эти слагаемые исчезают при соответствующем переходе к пределу. В одной из последующих глав мы докажем это и рассмотрим элементарную динамику вращающихся тел.

Иногда мы говорим о скалярной функции положения, например о температуре $T(x, y, z)$ в точке (x, y, z) как о *скалярном поле*. Подобно этому о векторе, значение которого является функцией положения, например о скорости $\mathbf{v}(x, y, z)$ материальной точки, находящейся в точке (x, y, z), мы говорим как о *векторном поле*. Векторный анализ в значительной своей части посвящен скалярным и векторным полям и дифференциальным операциям над векторами, подробно рассматриваемым в т. II.

2.5. Часто применяемые векторные тождества

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{74}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_xB_y - A_yB_x), \tag{75}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{A}, \tag{76}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}, \tag{77}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \tag{78}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\,\mathbf{C} - [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\,\mathbf{D}, \tag{79}$$

$$\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})] = (\mathbf{A}\times\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}). \tag{80}$$

Задачи

При решении предлагаемых задач применяйте векторные методы, где это возможно.

1. *Составляющие вектора.* Поставьте на листе бумаги две точки, обозначьте их O и P (рис. 2.37). Проведите отрезок от O к P, обозначив его конец стрелкой.

а) Найти x и y — составляющие вектора $\overrightarrow{OP}$ (в *см*).

б) Параллельно осям на рис. 2.37 провести другую пару осей, проходящих через точку O; каковы новые составляющие этого вектора x' и y'?

в) Повернуть вторую пару осей на 30° против часовой стрелки и найти составляющие вектора x'' и y'' в новой системе координат.

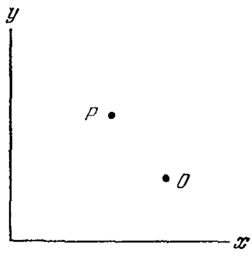

Рис. 2.37

2. *Сложение векторов.* Построить результаты следующих операций сложения векторов:

а) Сложить вектор длиной 2 *см*, направленный на восток, с вектором длиной 3 *см*, направленным на северо-запад.

б) Сложить вектор длиной 8 *см*, направленный на восток, с вектором длиной 12 *см*, направленным на северо-запад.

в) Сравнить результаты пунктов а) и б) и сформулировать теорему о сложении двух векторов, кратных двум другим векторам.

3. *Умножение на скаляр.* Пусть **A** — вектор длиной 2,0 *см*, направленный под углом 70° к востоку от северного направления, а **B** — вектор длиной 3,5 *см*, направленный под углом 130° к востоку от северного направления. При решении