поворота, не влияет на окончательное положение предмета, если исключить слагаемые такого же порядка малости, как квадрат величины бесконечно малых поворотов, а эти слагаемые исчезают при соответствующем переходе к пределу. В одной из последующих глав мы докажем это и рассмотрим элементарную динамику вращающихся тел.

Иногда мы говорим о скалярной функции положения, например о температуре $T(x, y, z)$ в точке (x, y, z) как о *скалярном поле*. Подобно этому о векторе, значение которого является функцией положения, например о скорости $\mathbf{v}(x, y, z)$ материальной точки, находящейся в точке (x, y, z), мы говорим как о *векторном поле*. Векторный анализ в значительной своей части посвящен скалярным и векторным полям и дифференциальным операциям над векторами, подробно рассматриваемым в т. II.

2.5. Часто применяемые векторные тождества

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{74}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_xB_y - A_yB_x), \tag{75}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{A}, \tag{76}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}, \tag{77}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \tag{78}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\,\mathbf{C} - [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\,\mathbf{D}, \tag{79}$$

$$\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})] = (\mathbf{A}\times\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}). \tag{80}$$

Задачи

При решении предлагаемых задач применяйте векторные методы, где это возможно.

1. *Составляющие вектора.* Поставьте на листе бумаги две точки, обозначьте их O и P (рис. 2.37). Проведите отрезок от O к P, обозначив его конец стрелкой.

а) Найти x и y — составляющие вектора $\overrightarrow{OP}$ (в *см*).

б) Параллельно осям на рис. 2.37 провести другую пару осей, проходящих через точку O; каковы новые составляющие этого вектора x' и y'?

в) Повернуть вторую пару осей на 30° против часовой стрелки и найти составляющие вектора x'' и y'' в новой системе координат.

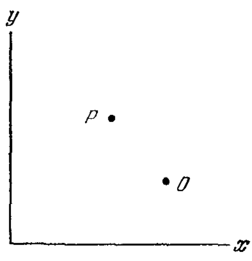

Рис. 2.37

2. *Сложение векторов.* Построить результаты следующих операций сложения векторов:

а) Сложить вектор длиной 2 *см*, направленный на восток, с вектором длиной 3 *см*, направленным на северо-запад.

б) Сложить вектор длиной 8 *см*, направленный на восток, с вектором длиной 12 *см*, направленным на северо-запад.

в) Сравнить результаты пунктов а) и б) и сформулировать теорему о сложении двух векторов, кратных двум другим векторам.

3. *Умножение на скаляр.* Пусть $\mathbf{A}$ — вектор длиной 2,0 *см*, направленный под углом 70° к востоку от северного направления, а $\mathbf{B}$ — вектор длиной 3,5 *см*, направленный под углом 130° к востоку от северного направления. При решении

пользуйтесь транспортиром или специальной бумагой, разграфленной в полярных координатах.

а) Построить векторы, указанные выше, и еще два вектора, удлиненные в 2,5 раза.

б) Умножить **A** на —2 и **B** на +3 и найти сумму полученных векторов.

Ответ. Вектор длиной 9,4 *см*, направленный под углом 150° к востоку от северного направления.

в) Отметить точку, находящуюся на 10 *см* к северу от начала координат. Найти такие векторы, кратные **A** и **B**, чтобы векторная сумма этих кратных была вектором, идущим из начала координат в отмеченную точку.

4. *Единичные векторы.* а) Начертить вектор единичной длины, умножить его на 4 и начертить новый вектор.

б) Начертить другой единичный вектор, перпендикулярный к построенному вектору, имеющему длину 4 единицы. Помножить его на —3 и сложить с вектором длиной в 4 единицы.

в) Пользуясь осями координат, направленными вдоль единичных векторов, найти x- и y-составляющие суммы векторов.

г) Любой произвольный вектор на плоскости можно выразить в виде суммы определенных кратных двух непараллельных векторов. В чем состоит особое удобство ортогональных (т. е. взаимно перпендикулярных) единичных векторов? (Указание: рассмотреть скалярное произведение двух векторов.)

5. *Скалярное и векторное произведения двух векторов.* Даны два вектора: $\mathbf{a}=3\hat{\mathbf{x}}+4\hat{\mathbf{y}}-5\hat{\mathbf{z}}$ и $\hat{\mathbf{b}}=-\mathbf{x}+2\hat{\mathbf{y}}+6\hat{\mathbf{z}}$. Рассчитать, пользуясь векторными методами:

а) Длину каждого вектора.

Ответ. $a=\sqrt{50}$; $b=\sqrt{41}$.

б) Скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Ответ. —25.

в) Угол между векторами.

Ответ. 123,5°.

г) Направляющие косинусы каждого из векторов.

д) Сумму $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Ответ. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\hat{\mathbf{x}}+6\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}$.

е) Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Ответ. $34\hat{\mathbf{x}}-13\hat{\mathbf{y}}+10\hat{\mathbf{z}}$.

6. *Векторная алгебра.* Два вектора заданы так, что

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=11\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{a}-\mathbf{b}=-5\hat{\mathbf{x}}+11\hat{\mathbf{y}}+9\hat{\mathbf{z}}.$$

а) Найти **a** и **b**.

б) Пользуясь векторными методами, найти угол между векторами **a** и $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

7. *Сложение скоростей.* Пилот ведет самолет к пункту, находящемуся на 200 *км* к востоку от места взлета. Ветер дует с северо-запада со скоростью 30 *км/час*. Вычислить вектор скорости самолета относительно движущегося воздуха, если согласно расписанию он должен достичь места назначения за 40 *мин*.

Ответ. $\mathbf{v}=(279\hat{\mathbf{x}}+21\hat{\mathbf{y}})$ *км/час*; вектор $\hat{\mathbf{x}}$ направлен на восток, вектор $\hat{\mathbf{y}}$ — на север.

8. *Обращение осей координат.* Можно ли превратить правую систему единичных координатных векторов в левую систему, помножив все три единичных вектора на один скаляр? Какое это число?

9. *Операции с векторами; относительный радиус-вектор.* Две частицы испускаются одним и тем же источником, и к данному моменту времени они достигли следующих положений:

$$\mathbf{r}_1=4\hat{\mathbf{x}}+3\hat{\mathbf{y}}+8\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{r}_2=2\hat{\mathbf{x}}+10\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}}.$$

а) Изобразить положения частиц и написать выражение для перемещения **r** частицы 2 относительно частицы 1.

Ответ. $r_1=9,4$; $r_2=11,3$; $r=7,9$.

б) Пользуясь скалярным произведением, найти абсолютную величину каждого вектора.

в) Вычислить углы между всеми возможными парами из этих трех векторов.

г) Вычислить величину проекции $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_1$.

Ответ. —1,2.

д) Вычислить векторное произведение $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

Ответ. $-65\hat{\mathbf{x}}-4\hat{\mathbf{y}}+34\hat{\mathbf{z}}$.

10. *Наименьшее расстояние между двумя материальными точками.* Две материальные точки 1 и 2 движутся вдоль осей x и y соответственно со скоростями $\mathbf{v}_1=2\hat{\mathbf{x}}$ *см/сек* и $\mathbf{v}_2=3\hat{\mathbf{y}}$ *см/сек*. При $t=0$ их координаты равны: $x_1=-3$ *см*, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=-3$ *см*.

а) Найти вектор $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, выражающий положение материальной точки 2 относительно точки 1 как функцию времени.

Ответ. $\mathbf{r}=[(3-2t)\hat{\mathbf{x}}+(3t-3)\hat{\mathbf{y}}]$ *см*.

б) Когда и где расстояние между этими материальными точками является наименьшим?

Ответ: $t=1,15$ *сек*.

11. *Внутренние диагонали куба.* Чему равен угол между двумя пересекающимися внутренними диагоналями куба? (*Внутренняя диагональ* соединяет две вершины и проходит внутри куба. Диагональ грани соединяет две вершины и проходит по грани куба.)

12. *Условие перпендикулярности векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Доказать, что вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

13. *Площадь поверхности тетраэдра.* Рассмотрите тетраэдр, вершины которого O, A, B, C находятся соответственно в начале координат и на осях x, y, z (радиус-вектор вершины A равен $\mathbf{a}=a\hat{\mathbf{x}}$ и т. д.). Вывести выражение для площади его поверхности, которая равна сумме площадей всех его треугольных граней.

14. *Объем параллелепипеда.* Ребра параллелепипеда описываются векторами $\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}$, $4\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{y}}+3\hat{\mathbf{z}}$, идущими из начала координат. Найти его объем.

Ответ. 12.

15. *Равновесие сил.* Пусть на материальную точку одновременно действуют три силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$. Результирующая сила $\mathbf{F}_р$ представляет собой просто векторную сумму этих сил. Материальная точка считается находящейся в равновесии, если $\mathbf{F}_р=0$.

а) Доказать, что если $\mathbf{F}_р=0$, то векторы, изображающие эти три силы, образуют треугольник.

б) Если, как сказано выше, $\mathbf{F}_р=0$, то может ли быть, чтобы один из векторов находился вне плоскости, образованной двумя другими?

в) Материальная точка, находящаяся под действием силы в 10 *н*, направленной вниз по вертикали, и подвешенная на веревке (натяжение 15 *н*), образующей с вертикалью угол 0,1 *рад*, не может находиться в равновесии. Какая третья сила необходима, чтобы достигалось равновесие? Является ли ответ однозначным?

16. *Работа, совершенная силами.* На материальную точку при ее перемещении из положения $A(20;\ 15;\ 0)$ (*см*) в положении $B(0;\ 0;\ 7)$ (*см*) одновременно действуют две постоянные силы

$$\mathbf{F}_1=(\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+3\hat{\mathbf{z}})\ \textit{дин}$$

и

$$\mathbf{F}_2=(4\hat{\mathbf{x}}-5\hat{\mathbf{y}}-2\hat{\mathbf{z}})\ \textit{дин}.$$

а) Какова работа (в эргах), совершенная над материальной точкой? Совершенная работа (см. гл. 5) определяется как $\mathbf{F}_р\cdot\mathbf{r}$, где $\mathbf{F}_р$ — результирующая сила (здесь $\mathbf{F}_р=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$), а $\mathbf{r}$ — перемещение материальной точки.

Ответ. —48 *эрг*.

б) Предположим, что действуют те же силы, но движение совершается от B к A. Какова в этом случае работа, совершенная над материальной точкой?

17. *Момент силы относительно точки.* Момент, или вращающий момент, $\mathbf{N}$ силы относительно данной точки определяется как $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий из данной точки в точку приложения силы $\mathbf{F}$. Пусть сила $\mathbf{F}=-3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}}$ приложена в точке $\mathbf{r}=(7\hat{\mathbf{x}}+3\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})$*). Помните, что $\mathbf{F}\times\mathbf{r}=-\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.

а) Каков момент силы (в *дин·см*) относительно начала координат? (Результат определения $\mathbf{N}$ выразить в виде линейной комбинации $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$.)

Ответ. $14\hat{\mathbf{x}}-38\hat{\mathbf{y}}+16\hat{\mathbf{z}}$.

б) Каков момент силы относительно точки (0, 10, 0)?

Ответ. $36\hat{\mathbf{x}}-38\hat{\mathbf{y}}-14\hat{\mathbf{z}}$.

18. *Выражение векторного произведения в виде определителя.* Заметьте, что выражение, развертывающее $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ по составляющим, содержит слагаемые вида $A_iB_j-B_iA_j$. Это как раз представляет собой определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ B_i & B_j \end{vmatrix}.$$

а) Доказать, что если оперировать с единичными векторами, как с числами, то

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

б) Доказать далее, что

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

19. *Движение по закону «случайных блужданий».* Материальная точка движется в пространстве по траектории, которая состоит из N равных отрезков длиной по s каждый. Ориентация каждого отрезка совершенно произвольна, и не существует какой-либо связи между направлениями любых двух отрезков. Суммарное перемещение:

$$\mathbf{S}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{s}_i.$$

Доказать, что при этих условиях среднее квадратичное смещение конечного положения этой точки относительно ее начального положения равно $\langle S^2\rangle=Ns^2$, где через $\langle\ \rangle$ обозначено среднее значение величины. (Указание: предположение, что направление каждого отрезка не зависит от направления всех других отрезков, означает, что $\langle\mathbf{s}_i\cdot\mathbf{s}_j\rangle=0$ для всех i и j, за исключением $i=j$.)

Дополнение 1. Векторы и сферические полярные координаты

В сферических координатах положение точки выражается величинами r, θ, φ, причем r — это абсолютная величина вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала координат к данной точке; θ — угол между вектором $\mathbf{r}$ и полярной осью z, а φ — угол между осью x и проекцией вектора $\mathbf{r}$ на экваториальную плоскость, т. е. на плоскость xy (рис. 2.38). При этом всегда $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Проекция вектора $\mathbf{r}$ на плоскость xy имеет величину $r\sin\theta$. Заметьте, что декартовы координаты точки связаны с ее сферическими координатами следующими равенствами:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi;\qquad y=r\sin\theta\sin\varphi;\qquad z=\cos\theta. \tag{81}$$

а) Пусть первая точка занимает положение $\mathbf{r}_1\equiv(r_1,\ \theta_1,\ \varphi_1)$, а вторая точка — положение $\mathbf{r}_2\equiv(r_2,\ \theta_2,\ \varphi_2)$. Пусть θ_{12} — это угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Выражая скалярное произведение $\hat{\mathbf{r}}_1\cdot\hat{\mathbf{r}}_2=\cos\theta_{12}$ через $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, можно показать, что

$$\cos\theta_{12}=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{82}$$

*) Под точкой $\mathbf{r}$ подразумевается точка, имеющая в данной системе отсчета радиус-вектор $\mathbf{r}$. (*Прим. ред.*)