данной точки в точку приложения силы $\mathbf{F}$. Пусть сила $\mathbf{F}=-3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}}$ приложена в точке $\mathbf{r}=(7\hat{\mathbf{x}}+3\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})$*). Помните, что $\mathbf{F}\times\mathbf{r}=-\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.

а) Каков момент силы (в *дин·см*) относительно начала координат? (Результат определения $\mathbf{N}$ выразить в виде линейной комбинации $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$.)

Ответ. $14\hat{\mathbf{x}}-38\hat{\mathbf{y}}+16\hat{\mathbf{z}}$.

б) Каков момент силы относительно точки (0, 10, 0)?

Ответ. $36\hat{\mathbf{x}}-38\hat{\mathbf{y}}-14\hat{\mathbf{z}}$.

18. *Выражение векторного произведения в виде определителя.* Заметьте, что выражение, развертывающее $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ по составляющим, содержит слагаемые вида $A_iB_j - B_iA_j$. Это как раз представляет собой определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ B_i & B_j \end{vmatrix}.$$

а) Доказать, что если оперировать с единичными векторами, как с числами, то

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

б) Доказать далее, что

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

19. *Движение по закону «случайных блужданий».* Материальная точка движется в пространстве по траектории, которая состоит из N равных отрезков длиной по s каждый. Ориентация каждого отрезка совершенно произвольна, и не существует какой-либо связи между направлениями любых двух отрезков. Суммарное перемещение:

$$\mathbf{S}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{s}_i.$$

Доказать, что при этих условиях среднее квадратичное смещение конечного положения этой точки относительно ее начального положения равно $\langle S^2\rangle = Ns^2$, где через $\langle\ \rangle$ обозначено среднее значение величины. (Указание: предположение, что направление каждого отрезка не зависит от направления всех других отрезков, означает, что $\langle\mathbf{s}_i\cdot\mathbf{s}_j\rangle = 0$ для всех i и j, за исключением $i=j$.)

Дополнение 1. Векторы и сферические полярные координаты

В сферических координатах положение точки выражается величинами r, θ, φ, причем r — это абсолютная величина вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала координат к данной точке; θ — угол между вектором $\mathbf{r}$ и полярной осью z, а φ — угол между осью x и проекцией вектора $\mathbf{r}$ на экваториальную плоскость, т. е. на плоскость xy (рис. 2.38). При этом всегда $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Проекция вектора $\mathbf{r}$ на плоскость xy имеет величину $r\sin\theta$. Заметьте, что декартовы координаты точки связаны с ее сферическими координатами следующими равенствами:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi;\qquad y=r\sin\theta\sin\varphi;\qquad z=\cos\theta. \tag{81}$$

а) Пусть первая точка занимает положение $\mathbf{r}_1\equiv(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, а вторая точка — положение $\mathbf{r}_2\equiv(r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Пусть θ_{12} — это угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Выражая скалярное произведение $\hat{\mathbf{r}}_1\cdot\hat{\mathbf{r}}_2=\cos\theta_{12}$ через $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, можно показать, что

$$\cos\theta_{12}=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{82}$$

*) Под точкой $\mathbf{r}$ подразумевается точка, имеющая в данной системе отсчета радиус-вектор $\mathbf{r}$. (*Прим. ред.*)

где мы воспользовались тригонометрическим тождеством

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2. \tag{83}$$

Это хороший пример эффективности векторных методов (попробуйте получить формулу (82) другим способом!).

б) Подобным же образом, образуя векторное произведение $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$, найдите соотношение для $\sin\theta_{12}$.

Цилиндрические полярные координаты ρ, φ, z определяются следующими их *соотношениями с прямоугольными координатами:*

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\qquad z=z.$$

При использовании двух измерений координаты сводятся только к ρ и φ.

Дополнение 2. Кристаллические решетки и обратная решетка

Предположим, что пространство внутри определенной области является евклидовым. Наше предположение означает, что если все предметы, как-либо участвующие в данном опыте или наблюдении, сместить параллельно их первоначальным положениям на величину одного и того же вектора переноса $\mathbf{t}$, то в результате этого опыта ничего не изменится. Поэтому, когда мы говорим, что законы физики

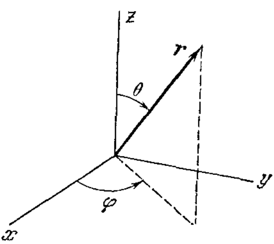

Рис. 2.38.

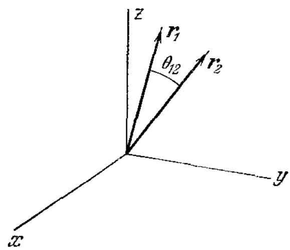

Рис. 2.39.

инвариантны по отношению к любому параллельному переносу $\mathbf{t}$, то это значит, что все тела, как-то участвующие в данном опыте, должны совершать одинаковое перемещение. Например, законы движения маятника не останутся инвариантными, если перенести этот маятник с уровня моря на вершину Эвереста: мы знаем, что в результате такого перемещения маятника относительно окружающих предметов, оставшихся неподвижными, изменится его собственная частота, так как изменится величина ускорения силы тяжести g.

Кристалл представляет собой регулярное расположение атомов в пространстве. Если мысленно представить себя движущимися внутри *неподвижного* кристалла, то мы увидим, что окружающая среда значительно меняется от точки к точке. Окружающий мир, каким он представлялся бы электрону, движущемуся внутри неподвижного кристалла, не обладает по отношению к параллельному переносу *) той полной инвариантностью, которая характерна для мира вне кристалла, в свободном пространстве. В кристалле окружающая среда вокруг точки $\mathbf{r}'$ будет такой же, что и окружающая среда вокруг точки $\mathbf{r}$, только в том случае, если эти две точки находятся друг от друга на расстоянии, кратном периоду повторяемости кристаллической решетки.

По определению мы называем идеальным кристаллом систему, состоящую из атомов, расположенных в кристаллической решетке таким образом, что существуют три *вектора элементарных трансляций* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, обладающие следующим свойством: расположение атомов, если смотреть на него из любой точки $\mathbf{r}$, выглядит во всех отношениях одинаковым с расположением атомов, наблюдаемым из точки

*) В кристаллографии такой параллельный перенос называется трансляцией. (*Прим. ред.*)