где мы воспользовались тригонометрическим тождеством

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2. \tag{83}$$

Это хороший пример эффективности векторных методов (попробуйте получить формулу (82) другим способом!).

б) Подобным же образом, образуя векторное произведение $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$, найдите соотношение для $\sin\theta_{12}$.

Цилиндрические полярные координаты ρ, φ, z определяются следующими их *соотношениями с прямоугольными координатами:*

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\qquad z=z.$$

При использовании двух измерений координаты сводятся только к ρ и φ.

Дополнение 2. Кристаллические решетки и обратная решетка

Предположим, что пространство внутри определенной области является евклидовым. Наше предположение означает, что если все предметы, как-либо участвующие в данном опыте или наблюдении, сместить параллельно их первоначальным положениям на величину одного и того же вектора переноса $\mathbf{t}$, то в результате этого опыта ничего не изменится. Поэтому, когда мы говорим, что законы физики

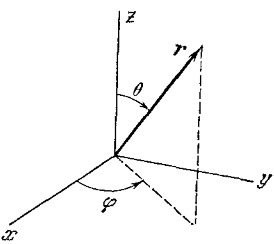

Рис. 2.38.

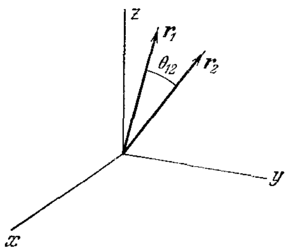

Рис. 2.39.

инвариантны по отношению к любому параллельному переносу $\mathbf{t}$, то это значит, что все тела, как-то участвующие в данном опыте, должны совершать одинаковое перемещение. Например, законы движения маятника не останутся инвариантными, если перенести этот маятник с уровня моря на вершину Эвереста: мы знаем, что в результате такого перемещения маятника относительно окружающих предметов, оставшихся неподвижными, изменится его собственная частота, так как изменится величина ускорения силы тяжести g.

Кристалл представляет собой регулярное расположение атомов в пространстве. Если мысленно представить себя движущимися внутри *неподвижного* кристалла, то мы увидим, что окружающая среда значительно меняется от точки к точке. Окружающий мир, каким он представлялся бы электрону, движущемуся внутри неподвижного кристалла, не обладает по отношению к параллельному переносу *) той полной инвариантностью, которая характерна для мира вне кристалла, в свободном пространстве. В кристалле окружающая среда вокруг точки $\mathbf{r}'$ будет такой же, что и окружающая среда вокруг точки $\mathbf{r}$, только в том случае, если эти две точки находятся друг от друга на расстоянии, кратном периоду повторяемости кристаллической решетки.

По определению мы называем идеальным кристаллом систему, состоящую из атомов, расположенных в кристаллической решетке таким образом, что существуют три *вектора элементарных трансляций* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, обладающие следующим свойством: расположение атомов, если смотреть на него из любой точки $\mathbf{r}$, выглядит во всех отношениях одинаковым с расположением атомов, наблюдаемым из точки

*) В кристаллографии такой параллельный перенос называется трансляцией. (*Прим. ред.*)

$\mathbf{r}'$, связанной с точкой $\mathbf{r}$ следующим соотношением:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}, \tag{84}$$

где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа. Заметьте, что **a**, **b**, **c** — это не векторы единичной длины; обычно они имеют длину порядка размеров атомов или немного больше. Система векторов элементарных трансляций называется *примитивной*, если л ю б ы е две точки **r** и **r**′, из которых расположение атомов выглядит совершенно одинаковым, могут быть связаны соотношением типа (84) при соответствующем выборе целых чисел n_1, n_2, n_3.

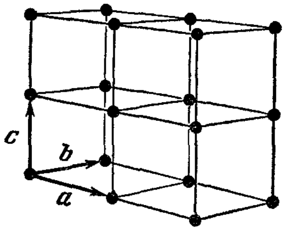

Рис. 2.40. Изображение небольшой части кристаллической решетки с векторами элементарных трансляций **a**, **b**, **c**. В изображенном здесь частном случае векторы **a**, **b** и **c** ортогональны, но для многих кристаллов **a**, **b** и **c** не ортогональны.

Таким образом, пространство внутри неподвижного кристалла обладает инвариантностью не относительно любого параллельного переноса, а только относительно параллельных переносов следующего вида:

$$\mathbf{t} = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}, \tag{85}$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа. Законы механики для движения электрона внутри неподвижного кристалла могут существенно отличаться от тех простых законов механики, которые выполняются в свободном пространстве. Для ознакомления с особенностями движения электронов внутри кристалла можно рекомендовать книгу Ч. Киттеля «Введение в физику твердого тела» (Физматгиз, 1963), содержание которой будет вполне понятно вам после изучения т. IV этого курса, посвященного квантовой физике.

Чаще всего примитивные векторы элементарных трансляций **a**, **b**, **c** не ортогональны. Математический анализ явлений, связанных с кристаллическим состоянием, и, в частности, дифракции рентгеновских лучей и электронов в кристаллических решетках сильно упрощается с помощью введенного Дж. В. Гиббсом

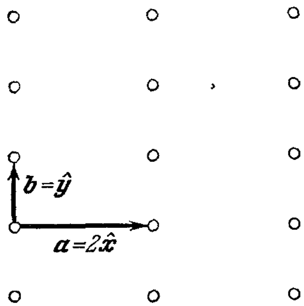

Рис. 2.41 Прямая кристаллическая решетка, для которой $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{y}}$.

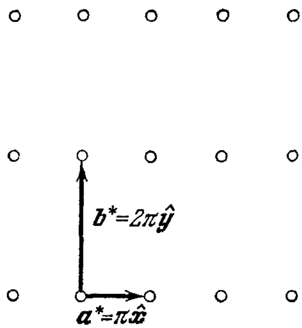

Рис. 2.42. Обратная решетка, для которой $\mathbf{a}^* = \pi\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{b}^* = 2\pi\hat{\mathbf{y}}$. Масштаб отличается от масштаба рис. 2.41.

понятия об обратной решетке. Векторы элементарных трансляций обратной решетки $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ выражаются через примитивные векторы элементарных трансляций прямой решетки посредством следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= 2\pi\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \qquad \mathbf{b}^* = 2\pi\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \\ \mathbf{c}^* &= 2\pi\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

В это определение вводится удобный коэффициент 2π, которого нет в обычном кристаллографическом определении, даваемом в элементарных руководствах.

Примечание. Единицы абсолютной величины векторов элементарных трансляций обратной решетки — это не единицы длины. Если длина векторов **a**, **b**, **c** измеряется в сантиметрах, то величина векторов **a***, **b***, **c*** измеряется в обратных сантиметрах ($см^{-1}$).

а) Показать, что $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a}=2\pi$, $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{c}=0$.

б) Пусть для двумерной кристаллической решетки в соответствующих единицах

$$\mathbf{a}=4\hat{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{b}=\hat{\mathbf{y}},$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы осей прямоугольных декартовых координат. Изобразите часть решетки. Найдите **a*** и **b*** и изобразите часть обратной решетки. (Указание: пусть $\mathbf{c}=\mathbf{z}$, если это облегчит вам соответствующие определения для двумерной решетки.)

в) Для другой двумерной решетки

$$\mathbf{a}=\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{b}=\hat{\mathbf{x}}\cos\frac{\pi}{3}+\hat{\mathbf{y}}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Изобразите часть решетки; найдите векторы элементарных трансляций обратной решетки и изобразите обратную решетку.

г) Показать, что

$$V^*=\frac{(2\pi)^3}{V},$$

где V — это объем $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ элементарной ячейки прямой решетки, а V^* — объем $\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*)$ элементарной ячейки обратной решетки. Для вывода этой формулы потребуется произвести довольно кропотливые выкладки.

Математическое дополнение 1. **Равенство векторов в сферическом пространстве**

Наше определение равенства двух векторов исходит из предположения, что пространство является евклидовым. В пространстве, обладающем кривизной, нельзя однозначно произвести сравнение двух векторов, если эти векторы имеют различные точки приложения. В качестве примера рассмотрим двумерное искривленное пространство, образованное поверхностью обыкновенного трехмерного шара. В этом пространстве мы должны считать «прямыми» линиями дуги больших кругов шара, потому что они представляют собой кратчайшие расстояния между точками *).

Если в таком двумерном пространстве нам надо сравнить два вектора **A** и **B**, то мы должны передвинуть вектор **B**, не меняя его направления, таким образом, чтобы совместить его начальную точку с начальной точкой вектора **A**. Но что означает «не меняя его направления»? Следуя методу построения, применявшемуся в неискривленном пространстве, мы проводим «прямую» линию через O_A и O_B. Затем мы перемещаем вектор **B** так, чтобы его начальная точка перемещалась по этой «прямой» по направлению к начальной точке вектора **A**, и делаем это таким образом, чтобы не менялся угол между вектором **B** и «прямой» линией O_AO_B (рис. 2.43).

После этого мы можем проверить наш способ сравнения, сначала переместив начало вектора **B** в точку O_C, сравнив его там с вектором **C**, а затем перемещая **B** вдоль «прямой» O_CO_A, чтобы сравнить его потом с **A** (рис. 2.44). Но эти два способа сравнения **B** с **A** дают различные ответы. Пусть в данном частном случае оба вектора

*) Линия, каждый отрезок которой MN является кратчайшим расстоянием между точками M и N, называется в математике геодезической линией. Только в евклидовом пространстве геодезические линии всегда являются прямыми. (*Прим. ред.*)