В это определение вводится удобный коэффициент 2π, которого нет в обычном кристаллографическом определении, даваемом в элементарных руководствах.

Примечание. Единицы абсолютной величины векторов элементарных трансляций обратной решетки — это не единицы длины. Если длина векторов **a**, **b**, **c** измеряется в сантиметрах, то величина векторов **a***, **b***, **c*** измеряется в обратных сантиметрах ($см^{-1}$).

а) Показать, что $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a}=2\pi$, $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{c}=0$.

б) Пусть для двумерной кристаллической решетки в соответствующих единицах

$$\mathbf{a}=4\hat{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{b}=\hat{\mathbf{y}},$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы осей прямоугольных декартовых координат. Изобразите часть решетки. Найдите **a*** и **b*** и изобразите часть обратной решетки. (Указание: пусть $\mathbf{c}=\mathbf{z}$, если это облегчит вам соответствующие определения для двумерной решетки.)

в) Для другой двумерной решетки

$$\mathbf{a}=\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{b}=\hat{\mathbf{x}}\cos\frac{\pi}{3}+\hat{\mathbf{y}}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Изобразите часть решетки; найдите векторы элементарных трансляций обратной решетки и изобразите обратную решетку.

г) Показать, что

$$V^*=\frac{(2\pi)^3}{V},$$

где V — это объем $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ элементарной ячейки прямой решетки, а V^* — объем $\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*)$ элементарной ячейки обратной решетки. Для вывода этой формулы потребуется произвести довольно кропотливые выкладки.

Математическое дополнение 1. **Равенство векторов в сферическом пространстве**

Наше определение равенства двух векторов исходит из предположения, что пространство является евклидовым. В пространстве, обладающем кривизной, нельзя однозначно произвести сравнение двух векторов, если эти векторы имеют различные точки приложения. В качестве примера рассмотрим двумерное искривленное пространство, образованное поверхностью обыкновенного трехмерного шара. В этом пространстве мы должны считать «прямыми» линиями дуги больших кругов шара, потому что они представляют собой кратчайшие расстояния между точками *).

Если в таком двумерном пространстве нам надо сравнить два вектора **A** и **B**, то мы должны передвинуть вектор **B**, не меняя его направления, таким образом, чтобы совместить его начальную точку с начальной точкой вектора **A**. Но что означает «не меняя его направления»? Следуя методу построения, применявшемуся в неискривленном пространстве, мы проводим «прямую» линию через O_A и O_B. Затем мы перемещаем вектор **B** так, чтобы его начальная точка перемещалась по этой «прямой» по направлению к начальной точке вектора **A**, и делаем это таким образом, чтобы не менялся угол между вектором **B** и «прямой» линией O_AO_B (рис. 2.43).

После этого мы можем проверить наш способ сравнения, сначала переместив начало вектора **B** в точку O_C, сравнив его там с вектором **C**, а затем перемещая **B** вдоль «прямой» O_CO_A, чтобы сравнить его потом с **A** (рис. 2.44). Но эти два способа сравнения **B** с **A** дают различные ответы. Пусть в данном частном случае оба вектора

---

*) Линия, каждый отрезок которой MN является кратчайшим расстоянием между точками M и N, называется в математике геодезической линией. Только в евклидовом пространстве геодезические линии всегда являются прямыми. (*Прим. ред.*)

A и **B** перпендикулярны к «прямой» $O_A O_B$ и поэтому параллельны между собой. Выберем вектор **C** так, чтобы он был параллелен **B** в том смысле, что **C** и **B** образуют одинаковые углы с «прямой» $O_C O_B$. Однако из рис. 2.43 ясно видно, что вектор **C** не будет параллельным вектору **A**, потому что они не образуют равных углов с «прямой», соединяющей O_C и O_A. Итак, мы пришли к противоречию: вектор **B** параллелен вектору **A**, а вектор **C** параллелен вектору **B**, но вектор **C** не параллелен вектору **A**. При этом для каждой пары брался наикратчайший путь сравнения. Если мы сначала сравним **B** с **C**, а затем **C** с **A**, то мы найдем, что вектор **B** не параллелен вектору **A**.

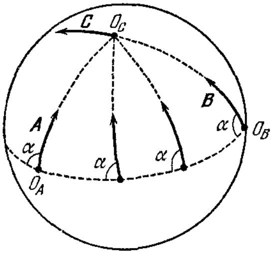

Рис. 2.43. Один возможный способ сравнения направлений векторов **B** и **A** заключается в перемещении **B** (начиная с точки O_B) вдоль экватора, но при этом так, что вектор **B** остается направленным на O_C, пока начало вектора **B** не попадет в точку O_A.

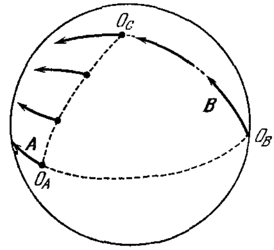

Рис. 2.44. Здесь вектор **B** перемещается с целью сравнения с **A** вдоль меридиана, пока его начальная точка не попадет в O_C, затем он смещается в боковом направлении вниз до экватора.

В качестве упражнения определите длину сторон сферического треугольника $O_A O_B O_C$, если при параллельном переносе вектора **B** сначала вдоль линии $O_B O_C$, а затем вдоль линии $O_C O_A$ этот вектор **B** оказался перпендикулярным к вектору **A**. Примите длину окружности большого круга за единицу.

Математическое дополнение 2. **Обобщенная векторная система обозначений в декартовых координатах**

Операции с векторными величинами и их выражение в обычной декартовой системе координат упрощаются посредством некоторого изменения обозначений. Новая система обозначений позволяет дать явные выражения для составляющих произведений векторов в более кратком виде, чем это было выведено выше.

Обозначим основные единичные векторы декартовой системы координат соответственно через $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ и введем *дельта-символ Кронекера* δ_{ij}, по определению равный

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \tag{87}$$

где индексы i и j принимают значения 1, 2, 3. Тогда выражение вектора **A** через его составляющие в декартовых координатах принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + A_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + A_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{\mathbf{e}}_i. \tag{88}$$

Греческая заглавная буква Σ означает, что нужно просуммировать величину, следующую за знаком Σ, по интервалу значений индексов, указанному снизу и сверху этой буквы. Введем условие, что эта буква не пишется, когда суммирование следует производить только по повторяющемуся индексу, обозначенному