A и **B** перпендикулярны к «прямой» O_AO_B и поэтому параллельны между собой. Выберем вектор **C** так, чтобы он был параллелен **B** в том смысле, что **C** и **B** образуют одинаковые углы с «прямой» O_CO_B. Однако из рис. 2.43 ясно видно, что вектор **C** не будет параллельным вектору **A**, потому что они не образуют равных углов с «прямой», соединяющей O_C и O_A. Итак, мы пришли к противоречию: вектор **B** параллелен вектору **A**, а вектор **C** параллелен вектору **B**, но вектор **C** не параллелен вектору **A**. При этом для каждой пары брался наикратчайший путь сравнения. Если мы сначала сравним **B** с **C**, а затем **C** с **A**, то мы найдем, что вектор **B** не параллелен вектору **A**.

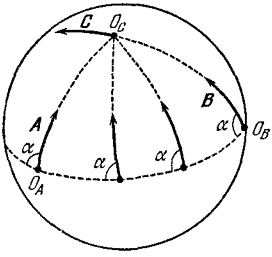

Рис. 2.43. Один возможный способ сравнения направлений векторов **B** и **A** заключается в перемещении **B** (начиная с точки O_B) вдоль экватора, но при этом так, что вектор **B** остается направленным на O_C, пока начало вектора **B** не попадет в точку O_A.

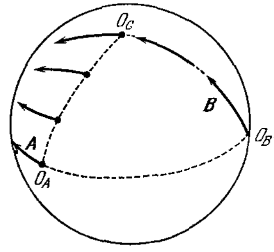

Рис. 2.44. Здесь вектор **B** перемещается с целью сравнения с **A** вдоль меридиана, пока его начальная точка не попадет в O_C, затем он смещается в боковом направлении вниз до экватора.

В качестве упражнения определите длину сторон сферического треугольника $O_AO_BO_C$, если при параллельном переносе вектора **B** сначала вдоль линии O_BO_C, а затем вдоль линии O_CO_A этот вектор **B** оказался перпендикулярным к вектору **A**. Примите длину окружности большого круга за единицу.

Математическое дополнение 2. **Обобщенная векторная система обозначений в декартовых координатах**

Операции с векторными величинами и их выражение в обычной декартовой системе координат упрощаются посредством некоторого изменения обозначений. Новая система обозначений позволяет дать явные выражения для составляющих произведений векторов в более кратком виде, чем это было выведено выше.

Обозначим основные единичные векторы декартовой системы координат соответственно через $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ и введем *дельта-символ Кронекера* δ_{ij}, по определению равный

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i=j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{87}$$

где индексы i и j принимают значения 1, 2, 3. Тогда выражение вектора **A** через его составляющие в декартовых координатах принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2\hat{\mathbf{e}}_2 + A_3\hat{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{\mathbf{e}}_i. \tag{88}$$

Греческая заглавная буква Σ означает, что нужно просуммировать величину, следующую за знаком Σ, по интервалу значений индексов, указанному снизу и сверху этой буквы. Введем условие, что эта буква не пишется, когда суммирование следует производить только по повторяющемуся индексу, обозначенному греческой буквой, т. е.

$$A_\mu \hat{e}_\mu \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{e}_i = \mathbf{A}. \tag{89}$$

Тогда, например, для скалярного произведения получаем

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \hat{e}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} B_i \hat{e}_i\right) = \sum_{i,\, j=1}^{3} A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_\mu B_\mu. \tag{90}$$

При этом используется следующее соотношение:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}. \tag{91}$$

Таким же образом получается

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = \hat{e}_\mu A_\mu B_\nu C_\nu. \tag{92}$$

Заметим теперь, что

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \hat{e}_3 \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_2 \cdot (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) = 1, \tag{93}$$

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_3 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_3 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_1) = \hat{e}_2 \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_3) = -1, \tag{94}$$

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_1) = \ldots = 0, \tag{95}$$

где многоточие в равенствах (95) относится к другим возможным произведениям вида $\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$, содержащим по меньшей мере два одинаковых индекса. Можно обобщить равенства (93) — (95), введя новый символ — *тензор Леви — Чивита* ε_{ijk}, по определению равный

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если индексы следуют в циклическом порядке,} \\ -1, & \text{если индексы следуют в антициклическом порядке,} \\ 0, & \text{если два индекса одинаковы,} \end{cases} \tag{96}$$

где индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3. Циклический порядок — это последовательности 123, 312, 231; антициклический порядок — это последовательности 132, 321, 213. Равенства (93), (94) и (95) принимают следующий вид:

$$\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \varepsilon_{ijk} \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{97}$$

Компоненты векторного произведения в декартовых координатах выражаются следующим образом:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{i,\, j,\, k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k = \varepsilon_{\lambda\mu\nu} \hat{e}_\lambda A_\mu B_\nu. \tag{98}$$

В качестве упражнения вычислите $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2$, пользуясь формулой (98).

Из истории физики. Дж. В. Гиббс

Рассказ о происхождении векторного анализа цитируется по гл. 7 книги Л. Ф. Уилера «Джошуа Виллард Гиббс. История великого ума» (Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 1962).

...Вероятно, Гиббс слишком хорошо понимал значение системы обозначений, когда он писал: «Именно сомнения относительно преимущества различных систем обозначений, удерживавшие меня ранее от каких-либо публикаций по данному предмету и удерживающие меня также сейчас от какой-либо формы окончательной публикации,... вызвали у меня ощущение, что в моем способе применения символов кроется какая-то неточность». Гиббс ввел точку и крест для обозначения скалярного и векторного произведений. Значение разработки векторного анализа иллюстрируется следующей характеристикой, данной самим Гиббсом: «Если я достиг каких-то успехов в математической физике, то это, как я думаю, произошло потому, что я смог преодолеть математические трудности».