3.6. Сохранение импульса

Среди физических законов, согласующихся с принципом относительности Галилея, особенное значение имеют законы сохранения импульса, сохранения массы и сохранения энергии. Эти законы уже знакомы вам по школьному курсу физики, где они формулировались без какой-либо связи с принципом относительности. Согласно закону сохранения энергии, полная энергия Вселенной постоянна, независимо от времени *). Рассматривая эти законы с точки зрения принципа относительности, мы не откроем ничего сверх того, что мы уже знаем. Однако мы выиграем в отношении понимания явлений, и это поможет нам обобщить закон сохранения импульса на релятивистские условия, для которых соотношение $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$ уже не является точным законом природы. Нашей конечной целью будет нахождение эквивалентов законов сохранения массы, энергии и импульса в условиях движения с релятивистскими скоростями, т. е. со скоростями, сравнимыми со скоростью света c.

В применении к удару двух тел, 1 и 2, закон сохранения импульса гласит, что сумма импульсов после удара равна сумме импульсов до удара:

$$\underbrace{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2}_{\text{до удара}}=\underbrace{\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'}_{\text{после удара}}, \qquad (19)$$

где, по определению, импульс $\mathbf{p}$ тела массой M равен

$$\mathbf{p}\equiv M\mathbf{v}. \qquad (20)$$

Мы предполагаем, что удар совершается в условиях, когда на оба тела не действуют внешние силы. Удар может быть или упругим, или неупругим. При упругом ударе вся кинетическая энергия сталкивающихся частиц сохраняется после удара как кинетическая энергия тех же частиц. При неупругом ударе часть кинетической энергии сталкивающихся частиц переходит после удара в какой-либо вид *внутренней* энергии возбужденного состояния (например, в теплоту) одной или более частиц. Важно убедиться, что закон сохранения импульса можно применять даже к *неупругому* удару.

В применении к удару двух тел закон сохранения массы гласит, что сумма масс после удара равна сумме масс до удара:

$$\underbrace{M_1+M_2}_{\text{до удара}}=\underbrace{M_1+M_2}_{\text{после удара}}. \qquad (21)$$

В гл. 12 уравнения (19) и (21) будут обобщены для случая частиц, движущихся с релятивистскими скоростями.

Пока предположим, что в процессе удара масса каждой частицы сохраняется неизменной. Мы дадим сейчас два различных вывода

---

*) Правильнее сформулировать эти законы следующим образом: «полная энергия замкнутой системы постоянна» и «полная масса замкнутой системы постоянна». При этом под *замкнутой системой* имеется в виду любая совокупность физических тел, которые не взаимодействуют с материей, не входящей в эту систему. (*Прим. ред.*)

закона сохранения импульса. Первый вывод основывается на предположении о *ньютоновских силах*. Второй вывод, являющийся более строгим и более общим, основывается на *принципе относительности Галилея* и *законе сохранения энергии*.

Первый вывод. Сохранение импульса не является обязательным следствием одного только уравнения $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$. В этом выводе мы дополнительно предполагаем, что силы между частицами — это силы специального характера, называемые *ньютоновскими*, для которых выполняется третий закон Ньютона. По определению ньютоновские силы обладают тем свойством, что сила $\mathbf{F}_{12}$, с которой частица 1 действует на частицу 2, равна по величине и противоположна по направлению силе $\mathbf{F}_{21}$, действующей со стороны частицы 2 на частицу 1:

$$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}. \tag{22}$$

Из второго закона Ньютона следует, что в течение любого бесконечно малого промежутка времени Δt

$$\mathbf{F}_{12}=M_2\frac{\Delta\mathbf{v}_2}{\Delta t},\quad \mathbf{F}_{21}=M_1\frac{\Delta\mathbf{v}_1}{\Delta t}. \tag{23}$$

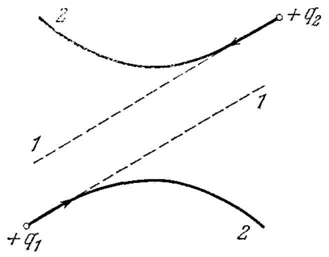

Рис. 3.15. Если два движущихся точечных заряда q_1 и q_2 проходят очень близко друг к другу, то их траектории отклоняются от первоначальных прямолинейных траекторий. При таком соударении сохраняется суммарный импульс, но силы не являются ньютоновскими. Отклонение от ньютоновского взаимодействия играет важную роль в тех случаях, когда частицы движутся очень быстро.

1 — первоначальная траектория; *2* — фактическая траектория.

Но $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$, и, таким образом, мы получаем из (22) и (23) закон сохранения импульса:

$$M_1\Delta\mathbf{v}_1+M_2\Delta\mathbf{v}_2=0, \tag{24}$$

или

$$(M_1\mathbf{v}_1+M_2\mathbf{v}_2)_{\text{нач}}=(M_1\mathbf{v}_1+M_2\mathbf{v}_2)_{\text{кон}}. \tag{25}$$

В любой момент сумма импульсов $M_1\mathbf{v}_1+M_2\mathbf{v}_2$ двух сталкивающихся частиц сохраняется постоянной при условии, что силы их взаимодействия являются ньютоновскими.

Однако простое допущение о ньютоновском характере сил часто не выполняется в точности. Но все же закон сохранения импульса является точным законом. В действительности взаимодействие частиц 1 и 2 не может быть мгновенным, потому что действие сил передается не с бесконечно большой, а с конечной скоростью, не превышающей скорость света (гл. 10). Таким образом, в любой момент сила $\mathbf{F}_{12}$ может быть и не равна в точности $-\mathbf{F}_{21}$. Мы можем ожидать, что сумма импульсов после удара будет равна сумме начальных импульсов только после того, как импульсы частиц достигнут своих конечных значений. Не следует основывать доказательство закона сохранения импульса на специальном допущении о ньютоновских силах. Для ньютоновских сил сумма импульсов строго сохраняется в любой момент времени, даже в течение самого процесса удара. Но для реальных физических сил, действующих не мгновенно, должны существовать такие стадии тесного взаимодействия двух частиц, в течение которых не сохраняется суммарный импульс.

Второй вывод. При этом выводе мы исходим из предположений о выполнении принципа относительности Галилея, а также о выполнении законов сохранения энергии и массы. Рассмотрим две свободные частицы 1 и 2, которые вначале имеют скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Предположим, что их начальные (и конечные) положения значительно разделены в пространстве, так что в периоды до начала и после окончания удара частицы не взаимодействуют. Из школьного курса физики (или из гл. 5) известно, что до начала удара кинетическая энергия частиц равна

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2. \tag{26}$$

Теперь пусть между частицами произойдет удар; этот удар не обязательно должен быть упругим. Кинетическая энергия после удара равна

$$\frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2, \tag{27}$$

где w_1 и w_2 — скорости после удара, определенные через такой промежуток времени, что частицы уже больше не взаимодействуют. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2 + \Delta\varepsilon, \tag{28}$$

где $\Delta\varepsilon$ (которое может быть или положительным, или отрицательным) — это изменение энергии внутреннего возбуждения частиц в результате удара. Внутреннее возбуждение может представлять собой вращение или внутренние колебания; оно может заключаться в возбуждении связанного электрона посредством перехода его с низкого энергетического уровня на более высокий. При упругом ударе $\Delta\varepsilon = 0$, но при таком рассуждении нам не следует ограничиваться упругими ударами *). Мы здесь предположили, что массы частиц M_1 и M_2 остаются после удара без изменений.

Теперь рассмотрим для этого удара подобные же соотношения в штрихованной системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ относительно первоначальной нештрихованной системы отсчета. Обозначим через $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ начальные скорости, а через $\mathbf{w}'_1$, $\mathbf{w}'_2$ — конечные скорости частиц в штрихованной системе отсчета. Мы

---

*) При неупругом ударе вовсе не нарушается закон сохранения энергии, а происходит только перераспределение ее: убыль кинетической энергии механического движения тел переходит в энергию возбуждения в виде вращательного или колебательного движения их составных частей или в другие формы энергии внутреннего движения. Такое внутреннее движение часто называют *теплотой* или тепловым движением (см. т. V).

имеем, согласно правилу сложения скоростей,

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, & \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}, \\ \mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_1 - \mathbf{V}, & \mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2 - \mathbf{V}.\end{array}\right\} \tag{29}$$

Выражение закона сохранения энергии в штрихованной системе имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2} M_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2')^2 = \frac{1}{2} M_1 (w_1')^2 + \frac{1}{2} M_2 (w_2')^2 + \Delta\varepsilon. \tag{30}$$

Мы предполагаем, что энергия возбуждения $\Delta\varepsilon$ не меняется при перемене системы отсчета. Это согласуется с опытом.

Закон сохранения энергии должен быть инвариантным по отношению к преобразованию Галилея. Следовательно, как в штрихованной, так и в нештрихованной системах отсчета начальная кинетическая энергия должна быть равна сумме конечной кинетической энергии и энергии внутреннего возбуждения $\Delta\varepsilon$. Это означает, что должны выполняться как уравнение (28), так и уравнение (30). Можно выразить закон сохранения энергии в штрихованной системе отсчета, подставив в (30) уравнения преобразования (29) и заметив, что $(v_1')^2 = v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2$ и т. д., так что уравнение (30) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) =$$
$$= \frac{1}{2} M_1 (w_1^2 - 2\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \frac{1}{2} M_2 (w_2^2 - 2\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \Delta\varepsilon. \tag{31}$$

Заметим, что слагаемые с V^2 сокращаются в правой и левой частях. Соотношение (31) превращается в уравнение (28) — закон сохранения энергии в нештрихованной системе отсчета — только при условии, что в (31) сокращаются скалярные произведения, т. е. что

$$(M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} = (M_1\mathbf{w}_1 + M_2\mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{V}. \tag{32}$$

Уравнение (32) должно выполняться для любого значения $\mathbf{V}$. Следовательно, его общее решение таково, что

$$\boxed{M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = M_1\mathbf{w}_1 + M_2\mathbf{w}_2.} \tag{33}$$

Это представляет собой как раз *закон сохранения импульса.*

Резюмируем изложенное. Мы исходили из утверждения о выполнимости законов сохранения энергии и сохранения массы при ударе, а далее мы предположили, что эти законы выполняются в любой инерциальной системе отсчета. Таким образом, мы исходили также из предположения, что выполняется принцип относительнсс-ти Галилея. Мы нашли, что эти законы могут выполняться в различных инерциальных системах *только* в том случае, если при ударе сохраняется суммарный импульс. Мы не использовали закон сохранения массы в его наиболее общей форме. Если при ударе происходит какой-то обмен масс, так что после удара масса частицы M_1 стала равной $\overline{M}_1$, а масса частицы M_2 стала равной $\overline{M}_2$, но при этом $M_1+M_2=\overline{M}_1+\overline{M}_2$, то те же самые выкладки, которые применялись выше, также могли бы применяться при выводе закона сохранения импульса. Это иллюстрируется приводимым ниже примером.

3.7. Химические реакции

Докажем, что при химической реакции, заключающейся в перегруппировке или обмене местами атомов реагирующих веществ, сохраняется полный импульс, если только выполняется закон сохранения массы. Предполагаем, что внешние силы не действуют.

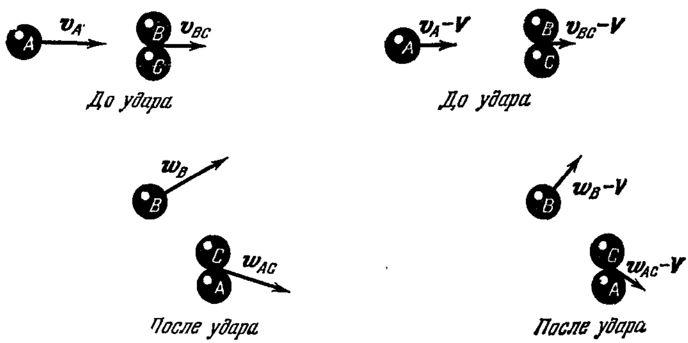

Рис. 3.16. После удара, совершающегося между атомом А и молекулой ВС, остаются атом В и молекула АС. Процесс соударения рассматривается относительно двух различных систем отсчета.

Пусть эта реакция описывается следующим уравнением:

$$A+BC\longrightarrow B+AC, \tag{34}$$

где через ВС обозначена молекула, состоящая из атома В и атома С. В ходе реакции атом С присоединяется к атому А, образуя молекулу АС.

Определяя величины скоростей относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, можно написать закон сохранения энергии в следующем виде:

$$\frac{1}{2}M_A v_A^2+\frac{1}{2}(M_B+M_C)v_{BC}^2=\frac{1}{2}M_B w_B^2+\frac{1}{2}(M_A+M_C)w_{AC}^2+\Delta\varepsilon. \tag{35}$$

Здесь $\Delta\varepsilon$ представляет собой сумму всех изменений энергии химических связей в молекулах, принимающих участие в реакции. В другой инерциальной системе отсчета, движущейся относительно первой со скоростью $\mathbf{V}$, можно написать уравнение этого закона,