Следовательно, легкая частица начинает двигаться со скоростью, приблизительно вдвое большей, чем скорость тяжелой частицы после удара. Далее, подставляя $w_л$ из (43) в уравнение (39), получаем

$$Mv_т \cong Mw_т + 2mw_т, \tag{44}$$

или

$$\frac{\Delta v_т}{v_т} \cong \frac{v_т - w_т}{w_т} \cong \frac{2m}{M}. \tag{45}$$

Используя уравнение (45), можно определить долю энергии тяжелой частицы, потерянную при ударе:

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{2}Mv_т^2\right)}{\frac{1}{2}Mv_т^2} = \frac{Mv_т\Delta v_т}{\frac{1}{2}Mv_т^2} = \frac{2\Delta v_т}{v_т} \cong \frac{4m}{M}. \tag{46}$$

Другие примеры применения закона сохранения импульса разбираются в гл. 6.

3.8. Силы инерции

Мы знаем, что в инерциальной системе отсчета, согласно второму закону Ньютона,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_и, \tag{47}$$

где слева в уравнение входит приложенная сила $\mathbf{F}$, а справа через $\mathbf{a}_и$ обозначено ускорение, наблюдаемое в инерциальной системе

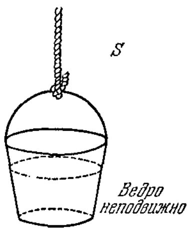

Рис. 3.18. Пример «фиктивных» сил — сил инерции, которые возникают в неинерциальных системах отсчета: когда ведро неподвижно относительно инерциальной системы отсчета S, поверхность воды плоская. Предполагается, что система S не обладает ускорением относительно удаленных звезд.

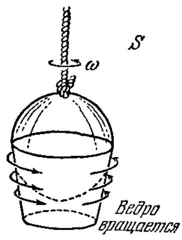

Рис. 3.19. Когда ведро вращается относительно инерциальной системы отсчета S, поверхность воды принимает форму параболоида.

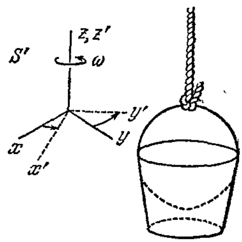

Рис. 3.20. Ведро неподвижно относительно вращающейся системы отсчета S'. Но поверхность воды все-таки имеет форму параболоида! В неинерциальной системе отсчета S' на воду действует центробежная сила инерции.

отсчета. Масса M принимается постоянной. Вектор $\mathbf{a}_и$ снабжен индексом «и» — начальной буквой слова *инерциальный*. Мы знаем, что уравнение (47) в том виде, как оно написано, не выполняется для неинерциальной системы отсчета, например для системы отсчета, вращающейся вместе с Землей, так как в него не входит величина $\mathbf{a}_0$ — ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы. Если $\mathbf{a}$ — это ускорение тела, измеренное в неинерциальной системе отсчета, то $\mathbf{a}+\mathbf{a}_0=\mathbf{a}_и$, или

$$\boxed{\mathbf{F}=M(\mathbf{a}+\mathbf{a}_0).} \tag{48}$$

Если мы проводим опыты в неинерциальной системе отсчета, то, составляя уравнение, характеризующее действие силы, мы всегда обязательно должны учитывать ускорение этой системы $\mathbf{a}_0$. Имея дело с неинерциальной системой отсчета, часто бывает удобно вместо $\mathbf{a}_0$ вводить величину $\mathbf{F}_0$, определенную таким образом, чтобы уравнение (48) приняло следующий вид:

$$\boxed{\mathbf{F}+\mathbf{F}_0=M\mathbf{a},} \tag{49}$$

где величина

$$\boxed{\mathbf{F}_0\equiv -M\mathbf{a}_0} \tag{50}$$

называется *фиктивной силой* или *силой инерции*, в отличие от истинной силы $\mathbf{F}$ *).

По определению сила инерции равна по абсолютной величине и противоположна по направлению произведению массы на ускорение неинерциальной системы; она просто выражает влияние ускорения самой неинерциальной системы отсчета на характер движения относительно этой системы; это та величина, которую нам надо

*) Вокруг понятия сил инерции часто возникают разногласия. Однако большинству специалистов, по-видимому, ясно, что с этими разногласиями не связано никакой физической проблемы, а речь идет о недоразумениях, возникающих в результате нечеткой терминологии, а иногда и вследствие неправильной трактовки данных опыта.

Центробежные силы инерции иногда называют фиктивными. Многие специалисты считают, что это неправильно или по крайней мере спорно. Термин «фиктивная сила» («кажущаяся сила» и т. п.) вряд ли можно считать удачным, потому что сила $\mathbf{F}_0$ имеет совершенно определенный физический смысл: она существует только для наблюдателя, жестко связанного с неинерциальной системой отсчета.

Прежде чем применять термин «фиктивная сила», следовало бы точно установить понятие фиктивной силы. Этому понятию, однако, можно приписывать различный смысл, и поэтому оно остается спорным. В сущности говоря, вопрос о реальности или фиктивности сил инерции возникает потому, что, рассматривая силы инерции, мы не можем указать второе тело, участвующее во взаимодействии, при котором возникают силы инерции. Мы не можем, однако, считать исключенным предположение о том, что этим вторым телом является вся совокупность небесных тел Вселенной. За этим исключением, силы инерции во всем остальном подобны обычным, «реальным» силам: они способны сообщать ускорение, совершать работу, мы складываем эти силы с другими силами, которые считаем «реальными», и получаем общую результирующую и т. д. Кроме того, с точки зрения общей теории относительности силы инерции эквивалентны силам тяготения (см. книги С. Э. Хайкина «Физические основы механики», Физматгиз, 1963, и «Силы инерции», «Наука», 2-е изд., 1967). (*Прим. ред.*)

прибавить к истинной силе $\mathbf{F}$, чтобы их сумма стала равной величине $M\mathbf{a}$, *наблюдаемой в неинерциальной системе отсчета*. Однако в физике все фиктивное выглядит запутанным, но вы всегда можете решать любую задачу, обращаясь к уравнению (48) и не пользуясь понятием о силе инерции.

Пример. *Акселерометр.* Предположим, что к массе M в направлении x со стороны растянутой пружины приложена сила, равная $F_x = -Cx$, где C — постоянная. Представим себе неинерциальную систему отсчета с ускорением $a_0 = a_0\hat{\mathbf{x}}$ также в направлении x. Если пружина неподвижна относительно такой неинерциальной системы отсчета, то в этой системе ее ускорение $\mathbf{a}$ равно нулю и уравнение $\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0)$ переходит в уравнение $F_x = Ma_0$, а уравнение $\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}$ приводится к следующему виду:

$$F_x + F_{0x} = 0. \qquad (51)$$

Следовательно,

$$-Cx + F_{0x} = 0, \qquad -Cx - Ma_0 = 0, \qquad (52)$$

или

$$x = -\frac{Ma_0}{C}. \qquad (53)$$

Смещение x пропорционально ускорению a_0 неинерциальной системы. Неинерциальной системой может быть, например, самолет или автомобиль. Как мы видим, уравнение (53) описывает принцип работы *акселерометра*, т. е. прибора, в котором к пружине прикреплена масса M, могущая перемещаться только в одном направлении. Ускорение a_0 неинерциальной системы отсчета измеряется по смещению x этой массы.

Пример. *Центробежная сила и центростремительное ускорение в равномерно вращающейся системе отсчета.* Хотя ниже мы подробно разберем вращающиеся системы отсчета, целесообразно уже сейчас обсудить один простой и распространенный пример. Рассмотрим материальную точку M, покоящуюся относительно неинерциальной системы отсчета, так что в этой системе ее ускорение $\mathbf{a} = 0$. Сама же неинерциальная система отсчета равномерно вращается вокруг оси, неподвижной относительно инерциальной системы отсчета. Как было показано в гл. 2, ускорение данной точки относительно инерциальной системы отсчета равно

$$\mathbf{a}_0 = -\omega^2\boldsymbol{\rho}, \qquad (54)$$

где вектор $\boldsymbol{\rho}$ направлен перпендикулярно к оси вращения и идет от этой оси к данной точке. Здесь используется буква $\boldsymbol{\rho}$ для обозначения двумерного аналога радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение точки в трехмерном пространстве.

Уравнением (54) определяется общеизвестное *центростремительное ускорение*. Материальную точку можно удержать в покое относительно вращающейся системы отсчета, например, с помощью растянутой пружины. Условие, что в неинерциальной системе отсчета $\mathbf{a}=0$, приводит, согласно уравнению (49), к следующему соотношению:

$$\mathbf{F}=-\mathbf{F}_0=M\mathbf{a}_0=-M\omega^2\boldsymbol{\rho}. \qquad (55)$$

В этом случае сила инерции носит название *центробежной силы инерции*; она равна $\mathbf{F}_0=M\omega^2\boldsymbol{\rho}$ и направлена от оси. В данном примере центробежная сила инерции уравновешивается упругой силой пружины, так что относительно вращающейся неинерциальной системы отсчета ускорение обращается в нуль (в этой системе отсчета материальная точка неподвижна).

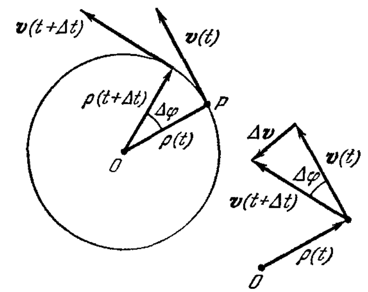

Рис. 3.21. Центростремительное ускорение. Если точка P движется по окружности радиусом ϱ с постоянной по величине скоростью v, то ускорение $\mathbf{a}$ точки P всегда направлено к центру окружности O. Абсолютная величина a равна $a=v^2/\varrho=\omega^2\varrho$, где $\omega=d\varphi/dt=v/\varrho$. Чтобы убедиться в этом, надо вспомнить, что вектор $\mathbf{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\mathbf{v}/\Delta t)$ всегда направлен к точке O, а его абсолютная величина

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right|= =\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\sin\Delta\varphi}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0} v\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Следовательно, $a=v\omega=v^2/\varrho=\omega^2\varrho$. Этот результат уже был выведен аналитически в гл. 2.

Если, например, $M=100$ *г*, $\rho=10$ *см*, а система отсчета вращается со скоростью 100 *об/сек*, то какова будет величина центробежной силы? Получаем:

$$F_0=M\omega^2\rho= =(10^2)\,(2\pi\cdot 100)^2\,(10)\ \text{дин}\approx \approx 4\cdot 10^8\ \text{дин}.$$

П р и м е р. *Опыты в свободно падающем лифте*. Пусть ускорение движения неинерциальной системы (свободно падающего лифта) равно

$$\mathbf{a}_0=-g\hat{\mathbf{z}}, \qquad (56)$$

где единичный вектор $\hat{\mathbf{z}}$ направлен вертикально вверх от поверхности Земли, а g — ускорение силы тяжести, соответствующее свободному падению тела под действием собственного веса. Согласно уравнению (50) сила инерции, действующая на материальную точку M в этой неинерциальной системе отсчета, равна

$$\mathbf{F}_0=-M\mathbf{a}_0=Mg\hat{\mathbf{z}}. \qquad (57)$$

Помещенный в лифте незакрепленный предмет находится под действием суммы следующих сил: силы тяготения $\mathbf{F}=-Mg\hat{\mathbf{z}}$ и силы инерции $\mathbf{F}_0=Mg\hat{\mathbf{z}}$, так что результирующая кажущаяся сила, действующая на этот предмет в неинерциальной системе отсчета, связанной со свободно падающим лифтом, равна нулю:

$$\mathbf{F}_0+\mathbf{F}=0. \qquad (58)$$

Следовательно, относительно неинерциальной системы отсчета тело не имеет ускорения. Это явление носит характер «невесомости».

Если тело не имело начальной скорости относительно лифта, то оно кажется парящим в пространстве.

Пример. *Маятник Фуко.* Маятник Фуко представляет собой прибор, делающий наглядным вращение Земли; с его помощью можно доказать, что Земля не является инерциальной системой отсчета.

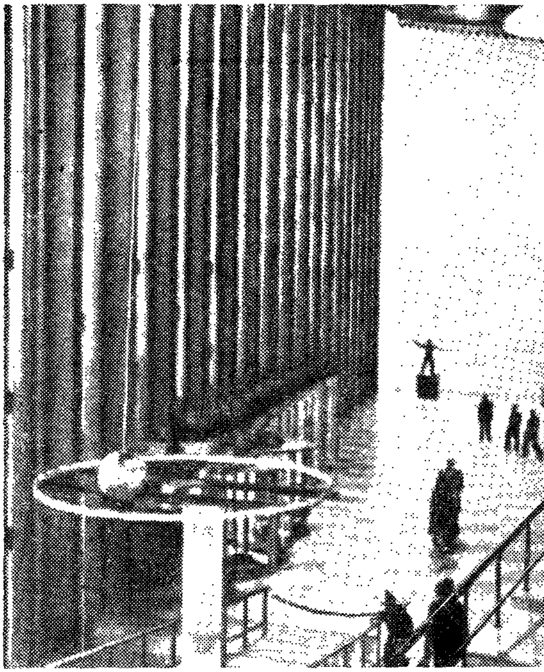

Рис. 3.22. Маятник Фуко, установленный в штаб-квартире Организации Объединенных Наций в Нью-Йорке. Шар, который виден слева, позолочен и весит 91 *кГ*. Он подвешен к потолку и находится на высоте 7,6 *м* над полом вестибюля. Трос из нержавеющей стали позволяет ему свободно колебаться в любой вертикальной плоскости. Этот шар колеблется непосредственно над металлическим кольцом диаметром около 1,8 *м*, поднятым над полом. Он непрерывно качается, как маятник, а плоскость его качаний медленно поворачивается по часовой стрелке, и, таким образом, получается наглядное подтверждение вращения Земли. Полный круг совершается приблизительно за 36 часов 45 минут. На шаре написано высказывание голландской королевы Юлианы: «Это удовольствие — жить сегодня и завтра». (*Фото ООН*)

Описываемый опыт был впервые публично произведен Фуко в 1851 г. Под большим куполом парижского Пантеона на тросе длиной около 70 *м* была подвешена масса в 28 *кг*. Крепление верхнего троса позволяет маятнику свободно качаться в любом направлении. Период колебания маятника такой длины составляет около 17 *сек* (см. гл. 7).

На полу под куполом была сооружена круговая ограда радиусом около 3 *м*, причем центр окружности находился на одной вертикали с точкой подвеса маятника. Внутри этой ограды был насыпан песок, а маятник оканчивался снизу металлическим острием, которое при каждом качании прочерчивало след на песке.

При длительном наблюдении было видно, как плоскость качаний маятника поворачивалась по направлению часовой стрелки, если смотреть сверху. За час плоскость качаний повернулась более чем на 11°. Полный оборот совершался примерно за 32 часа. При одном колебании эта плоскость поворачивалась на 3 *мм* по окружности.

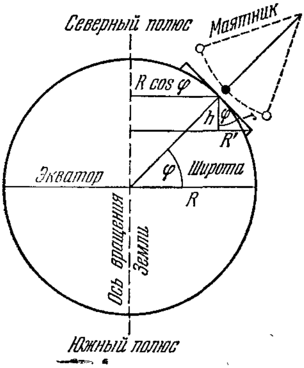

Рис. 3.23. Маятник Фуко, размеры которого сильно преувеличены относительно размеров Земли, схематически показан приблизительно на широте Парижа. Круг с песком под маятником имеет радиус r. Расстояние от земной оси до центра качаний маятника равно $R \cos \varphi$. Из-за вращения Земли южная сторона круга с песком движется быстрее северной стороны (относительно инерциальной системы отсчета).

Почему происходит вращение плоскости качаний маятника? Если бы опыт Фуко производился на Северном полюсе Земли, то мы могли бы сразу увидеть, что эта плоскость остается неподвижной относительно инерциальной системы отсчета, а Земля под маятником вращается, совершая один оборот за каждые 24 *ч*. Если смотреть сверху (скажем, с Полярной звезды) на Северный полюс, то вращение Земли совершается против часовой стрелки, так что наблюдателю на Земле, забравшемуся на лестницу у Северного полюса, казалось бы, что относительно него плоскость движения маятника вращается по часовой стрелке.

Иным (и более сложным для анализа) представляется положение в том случае, когда мы покинем Северный полюс, и тогда уже период полного оборота будет длиннее. Рассмотрим относительные скорости крайних, северной и южной, точек круга с песком, имеющего радиус r (рис. 3.23). Южная точка находится дальше от оси вращения Земли, и поэтому она будет перемещаться в пространстве быстрее, чем северная точка. Если обозначить через ω угловую скорость вращения Земли, а через R — радиус Земли, то скорость движения центра круга с песком равна $\omega R \cos \varphi$, где φ — широта Парижа (48°51′ сев. широты), отсчитываемая от экватора Земли. Как можно видеть на рис. 3.23, самая северная точка круга движется со скоростью

$$v_{\text{с}} = \omega R \cos \varphi - \omega r \sin \varphi, \tag{58а}$$

а самая южная точка — со скоростью

$$v_{\text{ю}} = \omega R \cos \varphi + \omega r \sin \varphi. \tag{58б}$$

Разность между каждой из этих скоростей и скоростью центра круга равна

$$\Delta v = \omega r \sin \varphi. \qquad (58в)$$

Если маятник был выведен из состояния покоя в центре круга толчком в плоскости север — юг, то составляющая его скорости в направлении восток — запад всегда будет той же самой, что и в центре круга.

Длина окружности круга равна $2\pi r$, так что время T_0 полного оборота плоскости движения маятника при условии, что величина Δv постоянна для всей окружности, равно

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \sin \varphi} = \frac{24}{\sin \varphi} \, (ч). \qquad (58г)$$

На экваторе $\sin \varphi = 0$ и время T_0 обращается в бесконечность.

Что произойдет, когда плоскость движения маятника совпадет с плоскостью восток — запад, проходящей через центр круга? Почему величина Δv должна оставаться здесь такой же, что и в плоскости север — юг? Это легче представить себе, если произвести следующий опыт с глобусом. Возьмите кусочек картона или плотной бумаги и держите его около глобуса. Пусть он почти касается глобуса в точке, где обозначен Париж, и находится в плоскости восток— запад, располагаясь по нормали к поверхности глобуса. Направление нормали к поверхности глобуса — это линия, в которой расположен трос маятника. Одной рукой держите кусочек картона, чтобы его плоскость была неподвижной, и одновременно другой рукой медленно вращайте глобус. Заметьте, что один конец отрезка, которым картон почти соприкасается с глобусом, кажется движущимся на юг, а другой конец кажется движущимся на север. Как результат такого наблюдения или как итог подробного теоретического анализа получается та же величина Δv, что и найденная выше: действительно, плоскость движения маятника поворачивается относительно кольца ограды на полу Пантеона с угловой скоростью $\omega \sin \varphi$, где ω — это угловая скорость вращения Земли, а φ — широта. Математический анализ уравнений движения маятника Фуко приводится во многих учебниках по теоретической механике для высшей школы.

3.9. Закон всемирного тяготения Ньютона

С целью подготовки к изучению последующих глав желательно рассмотреть закон всемирного тяготения. Этот закон гласит, что каждая масса M_1 притягивается к каждой другой массе M_2 во Вселенной с силой, равной

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \qquad (59)$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий от M_1 к M_2, а G — постоянная, имеющая величину $6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *дин·см²/г²*, или $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *н·м²/кг²*. Сила всемирного тяготения — центральная сила: она направлена по линии,