круга равна

$$\Delta v = \omega r \sin \varphi. \qquad (58в)$$

Если маятник был выведен из состояния покоя в центре круга толчком в плоскости север — юг, то составляющая его скорости в направлении восток — запад всегда будет той же самой, что и в центре круга.

Длина окружности круга равна $2\pi r$, так что время T_0 полного оборота плоскости движения маятника при условии, что величина Δv постоянна для всей окружности, равно

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \sin \varphi} = \frac{24}{\sin \varphi} \text{ (ч)}. \qquad (58г)$$

На экваторе $\sin \varphi = 0$ и время T_0 обращается в бесконечность.

Что произойдет, когда плоскость движения маятника совпадет с плоскостью восток — запад, проходящей через центр круга? Почему величина Δv должна оставаться здесь такой же, что и в плоскости север — юг? Это легче представить себе, если произвести следующий опыт с глобусом. Возьмите кусочек картона или плотной бумаги и держите его около глобуса. Пусть он почти касается глобуса в точке, где обозначен Париж, и находится в плоскости восток— запад, располагаясь по нормали к поверхности глобуса. Направление нормали к поверхности глобуса — это линия, в которой расположен трос маятника. Одной рукой держите кусочек картона, чтобы его плоскость была неподвижной, и одновременно другой рукой медленно вращайте глобус. Заметьте, что один конец отрезка, которым картон почти соприкасается с глобусом, кажется движущимся на юг, а другой конец кажется движущимся на север. Как результат такого наблюдения или как итог подробного теоретического анализа получается та же величина Δv, что и найденная выше: действительно, плоскость движения маятника поворачивается относительно кольца ограды на полу Пантеона с угловой скоростью $\omega \sin \varphi$, где ω — это угловая скорость вращения Земли, а φ — широта. Математический анализ уравнений движения маятника Фуко приводится во многих учебниках по теоретической механике для высшей школы.

3.9. Закон всемирного тяготения Ньютона

С целью подготовки к изучению последующих глав желательно рассмотреть закон всемирного тяготения. Этот закон гласит, что каждая масса M_1 притягивается к каждой другой массе M_2 во Вселенной с силой, равной

$$\mathbf{F} = -\frac{G M_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \qquad (59)$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий от M_1 к M_2, а G — постоянная, имеющая величину $6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *дин·см²/г²*, или $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *н·м²/кг²*. Сила всемирного тяготения — центральная сила: она направлена по линии, соединяющей две материальные точки. В учебниках для средней школы обычно описываются способы определения числовой величины G. Из них классическим является опыт Кэвендиша.

Экспериментально известно также, что с большой точностью гравитационная масса тела равна его инертной массе, т. е. величина массы M, которая входит в приведенное выше уравнение для силы всемирного тяготения, равна величине массы того же тела, входящей в уравнение второго закона Ньютона: $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$. Это равенство будет обсуждаться в гл. 14. Масса, входящая в уравнение закона всемирного тяготения, называется *гравитационной массой*, а масса, входящая во второй закон Ньютона, называется *инертной массой*. Классические опыты, подтвердившие равенство обеих масс, были выполнены Этвешем; недавно подобный же опыт был произведен Дайком (Scientific American **205**, 84 (XII, 1961)). Опыт Этвеша также описывается в гл. 14.

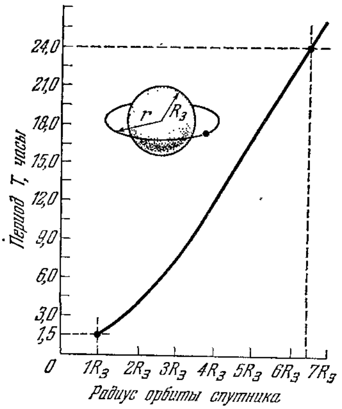

Рис. 3.24. Период обращения $T=2\pi/\omega$ искусственного спутника, описывающего круговую орбиту вокруг Земли. Этот график построен по уравнению (61).

П р и м е р. *Спутник на круговой орбите*. Представим себе спутник, обращающийся по круговой орбите, концентрической и компланарной с экватором Земли. При каком радиусе r орбиты спутник будет представляться неподвижным для наблюдателя, покоящегося относительно Земли? Мы предполагаем, что направление движения спутника по орбите — то же, что и направление вращения Земли.

Для круговой орбиты сила притяжения равна по величине и противоположна по направлению центробежной силе:

$$\frac{GM_З M_c}{r^2}=M_c\omega^2 r, \qquad (60)$$

где $M_З$ — масса Земли, а M_c — масса спутника. Преобразуем уравнение (60) следующим образом:

$$r^3=\frac{GM_З}{\omega^2}=\frac{GM_З T^2}{(2\pi)^2}, \qquad (61)$$

где T — период (рис. 3.24). В нашей частной задаче мы хотим получить для орбиты спутника величину ω, равную угловой скорости $\omega_З$ вращения Земли вокруг ее оси. Угловая скорость вращения Земли равна

$$\omega_З=\frac{2\pi\ сек^{-1}}{8{,}64\cdot 10^4}=7{,}3\cdot 10^{-5}\ сек^{-1}. \qquad (62)$$

При этом, если $\omega=\omega_з$, то из (61) следует:

$$r^3 = \frac{(6{,}67\cdot10^{-8})\cdot(5{,}98\cdot10^{27})}{(7{,}3\cdot10^{-5})^2}\ см^3 \approx 75\cdot10^{27}\ см^3, \tag{63}$$

или

$$r \approx 4{,}2\cdot10^9\ см. \tag{64}$$

Радиус Земли равен $6{,}38\cdot10^8$ *см*. Расстояние (64), грубо говоря, составляет одну десятую расстояния до Луны.

Задачи

1. *Скорость движения Земли вокруг Солнца.* а) Какова скорость, с которой центр Земли движется по орбите вокруг Солнца? (Считать орбиту круговой. Радиус орбиты приведен в таблице физических постоянных в приложении к этому тому.)

Ответ. $3{,}0\cdot10^6$ *см/сек*.

б) Каково отношение этой скорости к скорости света?

Ответ. 10^{-4}.

2. *Скорость вращательного движения.* Какова скорость, с которой точка на экваторе поверхности Земли движется относительно центра Земли?

Ответ. $4{,}7\cdot10^4$ *см/сек*.

3. *Падающее тело.* Массивное тело брошено с высоты 100 *м*. Сколько пройдет времени, пока оно достигнет поверхности Земли *)?

4. *Ускорение при круговом движении.* а) Каково центростремительное ускорение (в *см/сек*^{2}) тела с массой $M=1$ *кг* $=1000$ *г*, движущегося по кругу радиусом $R=100$ *см* с угловой скоростью $\omega=10$ *сек*$^{-1}$?

Ответ. $1\cdot10^4$ *см/сек*^{2}.

б) Какова при этом центробежная сила (в динах)?

Ответ. $1\cdot10^7$ *дин*.

5. *Угловая частота и период.* Камертон колеблется с частотой f, равной 60 *гц*.

а) Какова угловая частота его колебаний ω (в *рад/сек*)? Заметьте, что мы можем говорить об угловой частоте в связи с любым периодическим колебанием, а не только в связи с движением по окружности.

б) Каков период его колебаний T (в *сек*)? (Период — это время, за которое совершается полный цикл движения.)

6. *Ускорение Земли.* Предположим, что вся Земля покрыта слоем непрозрачных облаков. Опишите опыт, на основании которого можно было бы однозначно определить (имея в виду, что ускоренное движение может быть как вращательным, так и поступательным), является ли Земля инерциальной системой отсчета.

7. *Траектория движения относительно различных систем отсчета.* Некоторый предмет при $t=0$ начинает движение в горизонтальном направлении со скоростью 1000 *см/сек* относительно системы отсчета, которая в свою очередь в тот же момент $t=0$ начинает движение с поверхности Земли без начальной скорости и с ускорением, направленным вертикально вверх и равным 300 *см/сек*^{2}.

а) Каковы уравнения траектории этого предмета $x=f(t)$, $y=F(t)$ относительно такой инерциальной системы отсчета, начало координат которой неподвижно и находится на поверхности Земли в начальной точке движения (вращение Земли не учитывать)?

б) Изобразить траектории этого предмета в обеих системах отсчета.

8. *Ускорение при круговом движении.* Тело движется по окружности с постоянной по величине скоростью $v=50$ *см/сек*. Вектор скорости $\mathbf{v}$ изменяет направление на 30° за 2 *сек*.

а) Найти абсолютную величину вектора изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$.

б) Найти абсолютную величину среднего ускорения в течение этого промежутка времени.

в) Найти центростремительное ускорение этого равномерного кругового движения?

Ответ. 13,1 *см/сек*^{2}.

---

*) Допустить, что падение является свободным. (*Прим. ред.*)

9. *Центробежная сила инерции.* Тело, неподвижное относительно поверхности планеты, масса и радиус которой соответственно равны массе и радиусу Земли, имеет на экваторе ускорение силы тяжести, равное нулю. Какова продолжительность суток на этой планете?

Ответ. 1,3 *ч.*

10. *Необходимые условия удара.* Две частицы находятся в следующих начальных положениях: $x_1=5$ *см*, $y_1=0$ и $x_2=0$, $y_2=10$ *см*, причем скорость первой частицы $\mathbf{v}_1=-4\cdot 10^4\ \hat{\mathbf{x}}$ *см/сек*, а скорость второй частицы $\mathbf{v}_2$ имеет направление $-\hat{\mathbf{y}}$ (рис. 3.25).

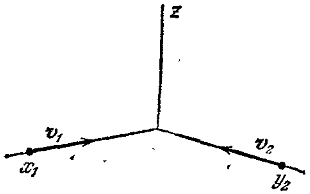

Рис. 3.25.

а) Какова должна быть величина $\mathbf{v}_2$, чтобы между этими частицами произошел удар?

Ответ. $8\cdot 10^4\ \hat{\mathbf{y}}$ *см/сек.*

б) Какова величина относительной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$?

Ответ. $4\cdot 10^4(2\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{x}})$ *см/сек.*

в) Определить общий критерий, выражающий необходимое условие для удара двух материальных точек через их радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

11. *Кинематика удара.* Соударяются две частицы (материальные точки), которые могут двигаться только в горизонтальной плоскости. Начальные данные: $M_1=85$ *г*, $M_2=200$ *г*, $\mathbf{v}_1=6{,}4\hat{\mathbf{x}}$ *см/сек*, $\mathbf{v}_2=(-6{,}7\hat{\mathbf{x}}-2{,}0\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек.*

а) Найти скорость центра масс. Положение центра масс определяется как

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}}=\frac{M_1\mathbf{r}_1+M_2\mathbf{r}_2}{M_1+M_2},$$

откуда получается скорость центра масс:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц.м}}=\frac{M_1\mathbf{v}_1+M_2\mathbf{v}_2}{M_1+M_2}.$$

Ответ. $(-2{,}3\hat{\mathbf{x}}-1{,}4\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек.*

б) Найти общий импульс.

Ответ. $(-796\hat{\mathbf{x}}-400\hat{\mathbf{y}})$ *г·см/сек.*

в) Найти скорости обеих частиц относительно системы отсчета, в которой центр масс остается неподвижным.

Ответ. $\mathbf{v}'_1=(9{,}2\hat{\mathbf{x}}+1{,}4\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек,*

$\mathbf{v}'_2=(-3{,}9\hat{\mathbf{x}}-0{,}6\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек.*

Пусть после удара $|\mathbf{w}_1|=9{,}2$ *см/сек*, $\mathbf{w}_2=-4{,}4\hat{\mathbf{x}}+1{,}9\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек.*

г) Каково направление скорости $\mathbf{w}_1$?

Ответ. Под углом — 84° относительно оси x.

д) Какова величина относительной скорости $\mathbf{w}_{\text{отн}}=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$?

Ответ. $(5{,}4\hat{\mathbf{x}}-11\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек.*

е) Каковы начальное и конечное значения суммарной кинетической энергии в системе отсчета, неподвижной относительно лаборатории, и в системе отсчета, неподвижной относительно центра масс? Является ли удар упругим или неупругим при указанных значениях $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$?

12. *Неупругий удар.* Два тела ($M_1=2$ *г*, $M_2=5$ *г*) имеют скорости $\mathbf{v}_1=10\hat{\mathbf{x}}$ *см/сек*, $\mathbf{v}_2=(3\hat{\mathbf{x}}+5\hat{\mathbf{y}})$ *см/сек* непосредственно перед ударом, в результате которого они двигаются дальше как одно целое.

а) Какова скорость центра масс (определение центра масс см. в задаче 11)?

б) Каков конечный импульс этих двух тел относительно лабораторной системы отсчета?

в) Каков их конечный импульс в системе отсчета, неподвижной относительно центра масс?

г) Каково отношение конечной кинетической энергии к начальной?

13. *Движение в неинерциальных системах отсчета.* Две неинерциальные системы отсчета S' и S'' совпадают в момент $t=0$ с инерциальной системой S. В этот момент система S'' обладает начальной скоростью v_0 вдоль оси x, а система S' не движется. При $t=0$ обе системы отсчета S' и S'' получают одинаковое ускорение **a** вдоль оси x (рис. 3.26).

а) Как меняются положения O' и O'' относительно O в зависимости от времени?

б) Указать, как положения x', x'' материальной точки в системах отсчета S', S'' связаны с ее положением x в системе отсчета S.

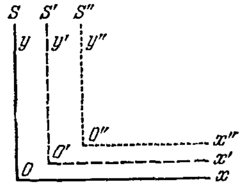

Рис. 3.26.

в) Написать относительно системы отсчета S уравнение движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы **F**. Преобразовать это уравнение для систем S' и S''. Появляются ли в преобразованных уравнениях силы инерции?

г) Будут ли приложенная сила и сила инерции соответственно одинаковыми в обеих движущихся системах отсчета? Какова скорость системы S'' относительно системы S'?

д) Что можно сказать о приложенных силах и силах инерции в обеих системах в общем случае, когда две неинерциальные системы отсчета движутся с постоянной относительной скоростью?

14. *Гравитационное притяжение между Землей и Луной.* Рассчитать (в динах) силу тяготения между Землей и Луной. О т в е т. $2\cdot 10^{25}$ *дин.*

15. *Орбита спутника.* Доказать, что период T обращения спутника по круговой орбите, расположенной непосредственно над экватором однородной планеты, имеющей форму шара с плотностью ρ, зависит только от плотности этой планеты (вывести уравнение).

Д о п о л н е н и е. Скорость и ускорение во вращающихся системах координат *)

Рассмотрим движение относительно неинерциальной системы отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z инерциальной системы отсчета. Постановка этой задачи обусловлена тем фактом, что Земля вращается, и поэтому система отсчета, закрепленная относительно поверхности Земли, не является инерциальной системой. Рассматривая движение относительно системы отсчета, неподвижно связанной с поверхностью Земли, надо ввести дополнительные слагаемые в уравнение $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$, чтобы учесть ускорение этой системы отсчета. Помимо уже известного нам центростремительного ускорения мы обнаружим при анализе наличие ускорения Кориолиса, которое играет важную роль при движении больших потоков морских вод и воздуха **).

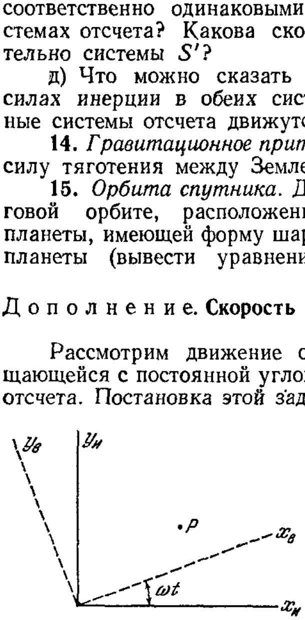

Рис. 3.27.

Можно вывести простое соотношение между координатами ($x_в$, $y_в$, $z_в$) точки P, определенными относительно вращающейся системы отсчета, и координатами ($x_и$, $y_и$, $z_и$) той же точки относительно инерциальной системы. Анализируя геометрические соотношения между координатами (рис. 3.28), мы видим, что

$$x_и = x_в \cos \omega t - y_в \sin \omega t, \qquad (65а)$$

$$y_и = x_в \sin \omega t + y_в \cos \omega t, \qquad (65б)$$

$$z_и = z_в. \qquad (65в)$$

*) Этот раздел с последующими пятью примерами можно не проходить в курсе по минимальной программе.

**) Оно также играет роль при движении речных вод (подмывание берегов рек в северном полушарии — западных, в южном — восточных). Действию ускорения Кориолиса подвергаются все тела, движущиеся относительно вращающейся системы координат. (*Прим. ред.*)