

13. Движение в неинерциальных системах отсчета. Две неинерциальные системы отсчета S' и S'' совпадают в момент $t=0$ с инерциальной системой S . В этот момент система S'' обладает начальной скоростью v_0 вдоль оси x , а система S' не движется. При $t=0$ обе системы отсчета S' и S'' получают одинаковое ускорение a вдоль оси x (рис. 3.26).

а) Как меняются положения O' и O'' относительно O в зависимости от времени?

б) Указать, как положения x' , x'' материальной точки в системах отсчета S' , S'' связаны с ее положением x в системе отсчета S .

в) Написать относительно системы отсчета S уравнение движения материальной точки, находящейся под действием постоянной силы F . Преобразовать это уравнение для систем S' и S'' . Появляются ли в преобразованных уравнениях силы инерции?

г) Будут ли приложенная сила и сила инерции соответственно одинаковыми в обеих движущихся системах отсчета? Какова скорость системы S'' относительно системы S' ?

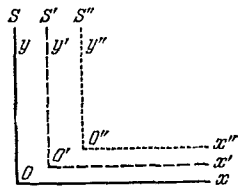


Рис. 3.26.

д) Что можно сказать о приложенных силах и силах инерции в обеих системах в общем случае, когда две неинерциальные системы отсчета движутся с постоянной относительной скоростью?

14. Гравитационное притяжение между Землей и Луной. Рассчитать (в динах) силу тяготения между Землей и Луной. Ответ. $2 \cdot 10^{25}$ дин.

15. Орбита спутника. Доказать, что период T обращения спутника по круговой орбите, расположенной непосредственно над экватором однородной планеты, имеющей форму шара с плотностью ρ , зависит только от плотности этой планеты (вывести уравнение).

Д о п о л н е н и е. Скорость и ускорение во вращающихся системах координат *)

Рассмотрим движение относительно неинерциальной системы отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z инерциальной системы отсчета. Постановка этой задачи обусловлена тем фактом, что Земля вращается,

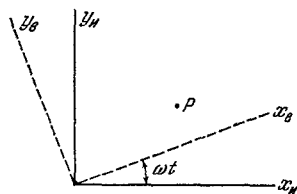


Рис. 3.27.

и поэтому система отсчета, закрепленная относительно поверхности Земли, не является инерциальной системой. Рассматривая движение относительно системы отсчета, неподвижно связанной с поверхностью Земли, надо ввести дополнительные слагаемые в уравнение $F=Ma$, чтобы учесть ускорение этой системы отсчета. Помимо уже известного нам центростремительного ускорения мы обнаружим при анализе наличие ускорения Кориолиса, которое играет важную роль при движении больших потоков морских вод и воздуха **).

Можно вывести простое соотношение между координатами (x_B, y_B, z_B) точки P , определенными относительно вращающейся системы отсчета, и координатами (x_H, y_H, z_H) той же точки относительно инерциальной системы. Анализируя геометрические соотношения между координатами (рис. 3.28), мы видим, что

$$x_H = x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t, \quad (65a)$$

$$y_H = x_B \sin \omega t + y_B \cos \omega t, \quad (65б)$$

$$z_H = z_B. \quad (65в)$$

*) Этот раздел с последующими пятью примерами можно не проходить в курсе по минимальной программе.

**) Оно также играет роль при движении речных вод (подмывание берегов рек в северном полушарии — западных, в южном — восточных). Действию ускорения Кориолиса подвергаются все тела, движущиеся относительно вращающейся системы координат. (Прим. ред.)

Соотношения между составляющими скорости в двух системах отсчета мы находим посредством дифференцирования уравнений (65) по времени (для экономии места мы здесь обозначаем дифференцирование по времени точкой над дифференцируемой величиной; таким образом, $\dot{x} \equiv dx/dt \equiv v_x$; $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv \dot{v}_x \equiv dv_x/dt$). Получаем

$$\dot{x}_И = \dot{x}_В \cos \omega t - \omega x_В \sin \omega t - \dot{y}_В \sin \omega t + \omega y_В \cos \omega t, \quad (66a)$$

$$\dot{y}_И = \dot{x}_В \sin \omega t + \omega x_В \cos \omega t + \dot{y}_В \cos \omega t - \omega y_В \sin \omega t, \quad (66b)$$

$$\dot{z}_И = \dot{z}_В. \quad (66b)$$

Ради простоты мы приняли величину ω постоянной. Для материальной точки, неподвижной относительно вращающейся системы отсчета ($\dot{x}_В = \dot{y}_В = \dot{z}_В = 0$), уравнения (66) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_И &= -\omega x_В \sin \omega t - \omega y_В \cos \omega t, \\ \dot{y}_И &= \omega x_В \cos \omega t - \omega y_В \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Подобным образом мы получаем уравнения для материальной точки, неподвижной относительно инерциальной системы отсчета ($\dot{x}_И = \dot{y}_И = \dot{z}_И = 0$):

$$\dot{x}_В - \omega y_В = 0, \quad \dot{y}_В + \omega x_В = 0, \quad \dot{z}_В = 0. \quad (68)$$

Составляющие ускорения определяются дифференцированием уравнений (66) по времени:

$$\ddot{x}_И = \ddot{x}_В \cos \omega t - 2\omega \dot{x}_В \sin \omega t - \omega^2 x_В \cos \omega t - \ddot{y}_В \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_В \cos \omega t + \omega^2 y_В \sin \omega t, \quad (69a)$$

$$\ddot{y}_И = \ddot{x}_В \sin \omega t + 2\omega \dot{x}_В \cos \omega t - \omega^2 x_В \sin \omega t + \ddot{y}_В \cos \omega t - 2\omega \dot{y}_В \sin \omega t - \omega^2 y_В \cos \omega t, \quad (69b)$$

$$\ddot{z}_И = \ddot{z}_В. \quad (69b)$$

Рис. 3.28. Положение точки P можно описать координатами $x_И, y_И, z_И$ инерциальной системы отсчета или координатами $x_В, y_В, z_В$ вращающейся системы отсчета. Вращение совершается вокруг оси z.

$$\begin{aligned} x_И &= x_В \cos \omega t - y_В \sin \omega t, \\ y_И &= x_В \sin \omega t + y_В \cos \omega t, \\ z_И &= z_В. \end{aligned}$$

Заметим, что для материальной точки, неподвижной относительно вращающейся системы отсчета, уравнения (69) приводятся с помощью соотношений (65) к следующему виду:

$$\ddot{x}_И = -\omega^2 (x_В \cos \omega t - y_В \sin \omega t) = -\omega^2 x_И, \quad (70a)$$

$$\ddot{y}_И = -\omega^2 (x_В \sin \omega t + y_В \cos \omega t) = -\omega^2 y_И. \quad (70b)$$

Уравнения (70) выражаются в векторной форме таким образом:

$$\mathbf{a}_И = -\omega^2 \mathbf{r}_И, \quad (71)$$

где $\mathbf{a}_И \equiv \ddot{\mathbf{r}}_И$ — это ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета, а $\mathbf{r}_И = x_И \hat{x}_И + y_И \hat{y}_И$ (см. уравнение (54)). Уравнение (71) представляет собой формулу для определения обычного центростремительного ускорения.

В уравнениях (69) содержится принципиальные физические результаты. Целесообразно перевести эти уравнения в векторную форму. После кропотливых алгебраических преобразований, которые мы воспроизводим ниже, получается следующий важный результат:

$\mathbf{a}_И$	=	$\mathbf{a}_В$	+	$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_В$	+	$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_В)$,	(72)
Ускорение в инерциальной системе отсчета		Ускорение во вращающейся системе отсчета		Ускорение Кориолиса		Центростремительное ускорение	

где индексом «в» обозначены ускорение, скорость и радиус-вектор во вращающейся системе отсчета. Угловая скорость ω принята постоянной. Под дополнительными слагаемыми правой части приведены их обычные названия.

Можно убедиться, что уравнение (72) перейдет в уравнения (69), если $\omega = \omega \hat{z}$; взяв проекции обеих частей уравнения (72) на ось x_n , получаем

$$(a_n)_{x_n} = (a_B)_{x_n} + 2(\omega \times v_B)_{x_n} + [\omega \times (\omega \times r_B)]_{x_n}. \quad (72a)$$

В уравнении (72a) специальные индексы показывают, что берутся проекции векторов на ось x_n . Например, проекция вектора a_B на ось x_n равна

$$(a_B)_{x_n} = \ddot{x}_B \cos \omega t - \ddot{y}_B \sin \omega t, \quad (72б)$$

потому что все векторы, выраженные через величины во вращающейся системе отсчета, должны проецироваться на направление x_n одинаковым образом. Уравнение (65a) показывает, как проецируется на направление x_n вектор r_B , и мы следуем

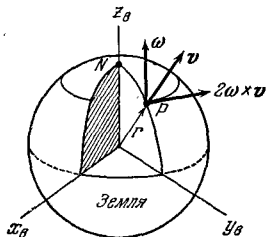


Рис. 3.29. Ускорение Кориолиса во вращающейся системе координат. Вращающаяся система (x_B, y_B, z_B) закреплена неподвижно на Земле; угловая скорость ω параллельна оси z_B . Предмет, движущийся вертикально вверх от точки P на поверхности Земли, имеет начальную скорость v . Ускорение Кориолиса $2\omega \times v$ направлено по касательной к линии широты (параллели), проходящей через P , как показано на схеме; N — Северный полюс. Если бы предмет свободно падал с какой-то высоты над поверхностью Земли, то ускорение Кориолиса было бы направлено в противоположную сторону. Почему?

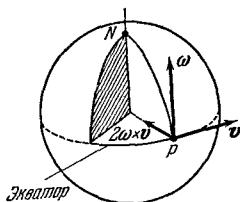


Рис. 3.30. Другой пример, относящийся к ускорению Кориолиса. Если предмет P находится на экваторе и имеет относительно поверхности Земли скорость v , касательную к экватору, то дополнительно к ускорению силы тяжести g он будет иметь ускорение, направленное к центру Земли и имеющее величину $2\omega v$. А что будет, если скорость v направлена на запад, а не на восток?

по тому же пути, проецируя на направление x_n вектор a_B . Это приводит нас к уравнению (72б). Второе слагаемое правой части уравнения (72a) преобразуется так:

$$2(\omega \times v_B)_{x_n} = 2\omega_{y_n}(v_B)_{z_n} - 2\omega_{z_n}(v_B)_{y_n} = -2\omega(\dot{x}_B \sin \omega t + \dot{y}_B \cos \omega t), \quad (72в)$$

где мы использовали равенство $\omega = \omega \hat{z}$ и проецировали v_B на направление оси y_n , пользуясь уравнением (65б). Последнее слагаемое правой части (72a) равно

$$[\omega \times (\omega \times r_B)]_{x_n} = -\omega(\omega \times r_B)_{y_n} = -\omega^2(r_B)_{x_n} = -\omega^2(x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t). \quad (72г)$$

Складывая почленно (72б), (72в) и (72г), мы получаем следующее уравнение, совпадающее с уравнением (69a):

$$\ddot{x}_n = (a_B)_{x_n} - 2\omega(v_B)_{y_n} - \omega^2(r_B)_{x_n} = \ddot{x}_B \cos \omega t - \ddot{y}_B \sin \omega t - 2\omega \dot{x}_B \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_B \cos \omega t - \omega^2 x_B \cos \omega t + \omega^2 y_B \sin \omega t. \quad (73)$$

Этим подтверждается, что векторное уравнение (72) равносильно уравнениям (69) для составляющих.

Уравнения (69) и (72) имеют важное значение. Они связывают ускорение a_B , наблюдаемое во вращающейся системе отсчета, с ускорением a_n относительно

инерциальной системы отсчета. Для того чтобы применить второй закон Ньютона, нам нужна величина a_n . Все слагаемые правой части уравнения (72) состоят из величин, наблюдаемых во вращающейся системе отсчета. Первое слагаемое a_B — ускорение относительно вращающейся системы отсчета; второе слагаемое $2\omega \times v_B$ называется *ускорением Кориолиса*; третье слагаемое $\omega \times (\omega \times r_B)$ — это обычное центростремительное ускорение материальной точки, движущейся по окружности. С целью упрощения мы исключили слагаемое $(d\omega/dt) \times r_B$, которое появилось бы, если бы при движении изменялась угловая скорость ω .

Суммарная сила инерции F_0 для равномерного вращения ($\dot{\omega}=0$) определяется по формулам (50) и (72): из уравнения $F_0 = -Ma_0$ мы получаем

$$F_0 = -2M\omega \times v_B - M\omega \times (\omega \times r_B). \quad (74)$$

Кориолисова Центробежная
сила инерции сила инерции

Центробежная сила инерции уже известна нам; если материальная точка неподвижна относительно вращающейся системы отсчета ($v_B=0$), то эта центробежная сила является единственной силой инерции. Мы можем переписать выражение для центробежной силы инерции в таком виде:

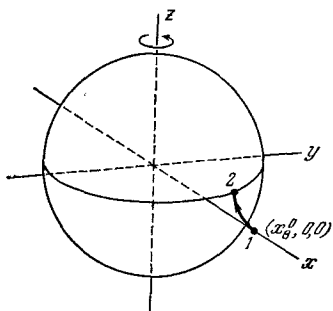
$$-M\omega \times (\omega \times \rho) = M\omega^2 \rho, \quad (74a)$$

где ρ — вектор, проведенный от оси вращения к данной точке перпендикулярно к этой оси. Это совпадает с нашим прежним определением центробежной силы инерции по формуле (55).

Кориолисова сила — это сила инерции, которая действует на материальную точку только в том случае, когда она движется относительно вращающейся системы отсчета.

Пример. Равномерное прямолинейное движение в инерциальной системе отсчета. Тело движется относительно инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно

Рис. 3.31. 1 — начальная точка движения; 2 — точка падения на Землю.



по траектории, заданной следующими уравнениями:

$$x_n = v_0 t, \quad y_n = 0, \quad z_n = 0. \quad (75)$$

Какой будет эта траектория в системе отсчета, вращающейся против часовой стрелки вокруг оси z_n с постоянной угловой скоростью ω ? Подставляя x_n, y_n, z_n из (75) в (65), получаем

$$\left. \begin{aligned} v_0 t &= x_B \cos \omega t - y_B \sin \omega t, \\ 0 &= x_B \sin \omega t + y_B \cos \omega t, \\ 0 &= z_B. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Решая систему уравнений (76), находим

$$x_B = v_0 t \cos \omega t, \quad y_B = -v_0 t \sin \omega t, \quad z_B = 0. \quad (77)$$

Пример. Свободное падение тел с башни. Пусть какое-то тело, находившееся в начальный момент $t=0$ в точке $(x_B^0, 0, 0)$ в состоянии покоя относительно Земли ($v_B=0$), стало падать под действием силы тяжести. Пусть эта исходная точка движения расположена непосредственно над экватором Земли, а начало координат вращающейся системы отсчета x_B, y_B, z_B находится в центре Земли. Ось z_B совпадает с осью вращения Земли. Требуется рассчитать ординату y_B той точки на поверхности Земли, куда упадет это тело.

Истинное ускорение тела относительно инерциальной системы отсчета (ускорение силы тяжести) имеет величину g и направление — \hat{x}_B , т. е. оно направлено противоположно начальному положению оси x_B вращающейся системы отсчета, неподвижной относительно Земли. Сила тяжести, действующая на тело, не имеет составляющей в направлении \hat{y}_B . Поэтому, если взять проекции обеих частей

уравнения (72) на направление \hat{y}_B , то получится следующее соотношение:

$$0 = \ddot{y}_B + 2\omega \dot{x}_B - \omega^2 y_B, \quad (78)$$

в котором можно подставить $\dot{x}_B = -gt$ во второе слагаемое и опустить третье слагаемое $-\omega^2 y_B$, потому что в начальный момент y_B равно нулю. В результате получается

$$\ddot{y}_B \cong 2\omega gt, \quad \dot{y}_B \cong \omega gt^2, \quad (79)$$

а искомое смещение y_B равно

$$y_B \cong \frac{1}{3} \omega gt^3. \quad (80)$$

Оно направлено к востоку. При нашем выборе осей координат угловая скорость вращения Земли ω положительна.

Это смещение нетрудно наблюдать. Пусть начальная точка находится на верхушке башни высотой 100 м над поверхностью Земли. Тогда мы получаем из соотношения $\Delta x_B \cong -\frac{1}{2}gt^2$ для свободного падения тела:

$$t^2 \cong -\frac{2\Delta x_B}{g} \approx \frac{2 \cdot 10^4}{10^3} \text{сек}^2 \approx 20 \text{сек}^2, \quad (81)$$

откуда следует согласно уравнению (80) (если подставить в него t^3 и угловую скорость вращения Земли $\omega \approx 0,7 \cdot 10^{-4} \text{сек}^{-1}$):

$$y_B \cong \frac{1}{3} \omega gt^3 \approx \frac{(10^{-4}) \cdot (10^3) \cdot (10^2) \text{ см}}{3} \approx 3 \text{ см}. \quad (82)$$

Подумайте, каким образом можно было бы определить проходящую через верхушку башни истинную вертикаль, относительно которой наблюдается смещение на расстояние y_B .

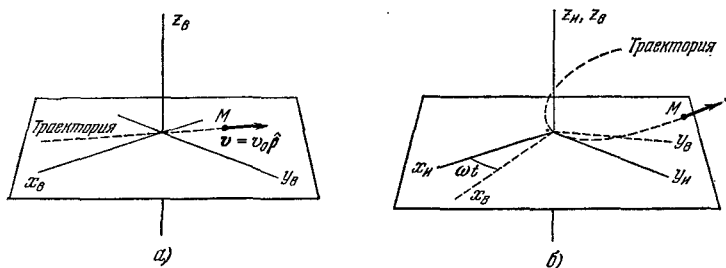


Рис. 3.32. а) Материальная точка M движется относительно равномерно вращающейся системы отсчета в плоскости $x_B y_B$ по прямой линии, пересекающей ось вращения. б) Движение той же точки M относительно инерциальной системы отсчета.

Пример. *Равномерное прямолинейное движение во вращающейся системе отсчета.* Какая необходима сила, чтобы под ее действием тело массы M двигалось относительно системы отсчета, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси, с постоянной скоростью, направленной по прямой линии, перпендикулярной к этой оси?

Соотношение между ускорениями:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B). \quad (83)$$

По условиям задачи $\mathbf{a}_B = 0$ и $\mathbf{v}_B = v_0 \hat{\rho}_B$, где $\hat{\rho}_B$ — единичный вектор, проведенный от оси вращения к данной материальной точке и перпендикулярный к этой оси.

Тогда, если обозначить через $\hat{\rho}_B$ единичный вектор, направленный по касательной к окружности, то

$$\mathbf{a}_и = 2\omega v_0 \hat{\rho}_B - \omega^2 v_0 t \hat{\rho}_B \quad (84)$$

и

$$\mathbf{F} = 2M\omega v_0 \hat{\rho}_B - M\omega^2 v_0 t \hat{\rho}_B. \quad (85)$$

Таким образом, для того чтобы характер движения соответствовал поставленным условиям, необходимы: постоянная по величине сила, направленная по касательной к окружности, и обычная центростремительная сила, обращенная внутрь по радиусу ρ_B , т. е. перпендикулярно к оси вращения.

Пример. Поправка к g на действие центробежной силы. Пусть g_B — кажущееся ускорение силы тяжести на экваторе, определенное в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей. Чему равна истинная величина ускорения силы тяжести $g_и$ после введения поправки на центробежную силу инерции?

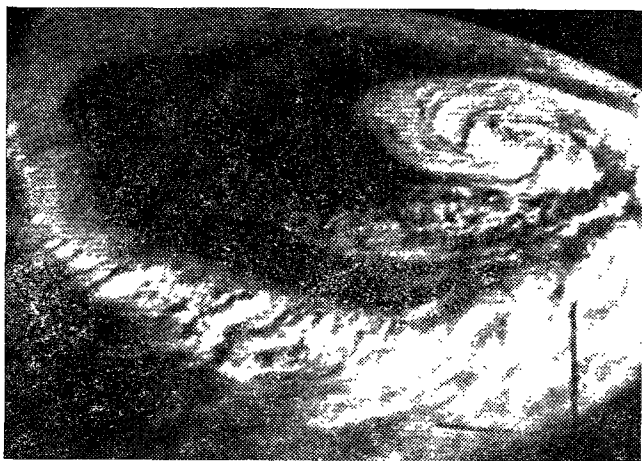


Рис. 3.33. Атмосферный вихрь вблизи Новой Шотландии, сфотографированной с искусственного спутника «Тайрос-VI» 29 мая 1963 г. (Фото д-ра Ф. Зингера)

Если единичный вектор \hat{z}_B направлен вверх нормально к поверхности Земли, то для определения ускорения g_B во вращающейся системе отсчета мы получаем следующее уравнение:

$$\mathbf{F}_и + \mathbf{F}_0 = -Mg_B \hat{z}_B, \quad (86)$$

но $\mathbf{F}_0 = -Ma_0$, где $a_0 = -\omega^2 \rho$, так что в тот момент, когда \hat{z}_B , $\mathbf{z}_и$ и $\hat{\rho}$ совпадают,

$$(F_и)_{z_B} = -Mg_и = -M(g_B + \omega^2 \rho) \quad (87)$$

На экваторе $\rho = R$, и, следовательно,

$$g_и = g_B + \omega^2 R. \quad (88)$$

Пример. Направление ветров. Неодинаковое нагревание земной атмосферы в экваториальной и полярной зонах приводит к возникновению горизонтального перепада давления вдоль меридианов; однако основная составляющая скорости ветров направлена вдоль параллелей. Это объясняется вращением Земли. Как показать, что установившееся движение невязкого газа вдоль поверхности Земли совершается параллельно изобарам (линиям постоянного атмосферного давления)? Каково будет распределение ветров вокруг местной зоны высокого атмосферного давления (антициклона) в северном полушарии?

Сила, обусловленная градиентом давления, действует в направлении с севера на юг перпендикулярно к изобарам. Благодаря вращению Земли поток с севера на юг приобретает относительно вращающейся Земли составляющую в направлении с востока на запад. Эту задачу можно сразу понять, сопоставив ее с данным выше анализом движения маятника Фуко.

В северном полушарии ветры дуют вокруг зоны высокого атмосферного давления по направлению часовой стрелки, так как воздух, движущийся радиально от центра этой зоны, отклоняется вправо, если смотреть вдоль его направления движения.

Математическое дополнение 1. Дифференцирование произведений векторов

В гл. 2 мы рассматривали дифференцирование векторов, в частности, напомним, что если

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad (89)$$

то

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \quad (90)$$

при условии, что направления основных координатных векторов постоянны.

Теперь выведем следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}. \quad (91)$$

Обозначим $\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$ через $\mathbf{P}(t)$ и рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \cong \\ &\cong \left[\mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Delta t \right] \times \left[\mathbf{B}(t) + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \Delta t \right] - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) = \\ &= \Delta t \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + (\Delta t)^2 \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

Отсюда следует:

$$\dot{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}. \quad (93)$$

Помните, что в векторных произведениях важен порядок сомножителей.

Подобным же способом можно доказать:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}}. \quad (94)$$

Математическое дополнение 2. Угловая скорость как векторная величина

В гл. 2 мы видели, что повороты на конечный угол не являются векторами, потому что при сложении двух таких поворотов не сохраняются свойства сложения векторов. Эта трудность не возникает при переходе к пределу для бесконечно малых поворотов, так как порядок, в котором производятся два бесконечно малых поворота, не влияет на конечное положение предмета (за исключением слагаемых одного порядка малости с квадратом величины бесконечно малых поворотов, а эти слагаемые в пределе исчезают). Если повернуть тело на бесконечно малый угол $\Delta\varphi_1$ вокруг оси $\hat{\mathbf{e}}_1$ и на бесконечно малый угол $\Delta\varphi_2$ вокруг оси $\hat{\mathbf{e}}_2$, то при достаточно малых $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ последовательность, в которой совершаются эти повороты, не влияет на результат (мы предполагаем, что обе оси проходят через общую точку). Существует один поворот вокруг оси $\hat{\mathbf{e}}_3$ на угол $\Delta\varphi_3$, который в пределе для бесконечно малых $\Delta\varphi$ равносильен сумме поворотов 1 и 2. Этот поворот определяется следующим векторным уравнением (рис. 3.34):

$$\Delta\varphi_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = \Delta\varphi_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \Delta\varphi_2 \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (95)$$