ГЛАВА 4

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Эта глава посвящена трем вопросам: динамике материальной точки, основы которой изучались в курсе физики средней школы, применению элементов математического анализа к физике и применению начал векторного исчисления, изложенных в гл. 2. Мы составим и решим уравнения движения для некоторых простых случаев, имеющих отношение к теории лабораторных работ по физике. Эти уравнения описывают движение заряженных частиц в однородных электрических и магнитных полях, т. е. явления, нашедшие исключительно широкое применение в экспериментальной физике. Глава заканчивается подробным анализом различных преобразований от одной системы отсчета к другой.

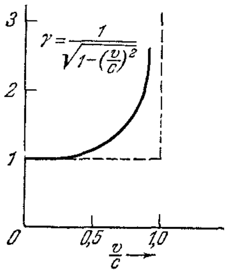

Рис. 4.1. Нерелятивистская механика дает точное описание движения материальной точки со скоростью v, если мы можем пренебречь разностью между $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ и 1. Буквой c обозначена скорость света.

Мы основываемся на предположении, что скорость материальной точки (частицы) всегда во много раз меньше скорости света; это означает, что в данной главе мы разбираем только нерелятивистские задачи и производим только нерелятивистские преобразования систем отсчета. Полученные здесь результаты правильны при том условии, что $v \ll c$. Влияние специальной теории относительности на эти результаты будет детально рассмотрено в гл. 12 и 13. Мы считаем также, что для изучаемых явлений законы классической механики представляют собой достаточно хорошее приближение к более общим законам квантовой физики, которым посвящен т. IV.

4.1. Сила, действующая на заряженную частицу. Гауссова система единиц

Согласно гл. 3 второй закон Ньютона выражается следующим уравнением:

$$\mathbf{F}=M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{1}$$

если мы считаем массу M постоянной. В физике известно множество различных сил: силы всемирного тяготения, электростатические силы, магнитные силы, а также разные ядерные силы, очень интенсивные, но действующие на коротких расстояниях. Элементарная механика окажется совсем неинтересной, если ограничиться при ее изучении рассмотрением примеров действия сил всемирного тяготения. Как здесь, так и в лабораторных работах мы рассмотрим задачи, связанные с действием электрических и магнитных сил на заряженные частицы. Для устранения пробела в знаниях лучше всего прочесть о магнитных и электрических силах в вашем школьном учебнике или в учебнике, выпущенном комитетом содействия изучению физики *), те главы, которые посвящены электричеству и магнетизму.

Для сравнения действия электрических и магнитных сил с действием силы тяжести надо вспомнить, что на материальную точку массой M, находящуюся у поверхности Земли, действует сила тяжести, равная $\mathbf{F}=-Mg\hat{\mathbf{z}}$, где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор, направленный от центра Земли. Вспомните также, что одноименные точечные электрические заряды, согласно закону Кулона, отталкиваются друг от друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной вдоль линии, соединяющей заряды. Величина этой силы равна

$$F=\frac{q_1q_2}{r^2}, \tag{2}$$

где q_1 и q_2 — величины зарядов. Уравнение (2) выражает закон Кулона в гауссовой системе единиц. Именно в таком виде он будет применяться во всем нашем курсе.

С помощью уравнения (2) определяется размерность электрического заряда. Произведение q_1q_2 должно иметь ту же размерность, что и r^2F, т. е. $[\text{см}]^2\cdot[\text{дин}]$ или $[\text{длина}]^2\cdot[\text{масса}]\cdot[\text{длина}]/[\text{время}]^2$. Следовательно,

$$[q]^2=[\text{масса}]\cdot[\text{длина}]^3/[\text{время}]^2,$$

так что размерность величины заряда

$$[q]=[\text{масса}]^{1/2}\cdot[\text{длина}]^{3/2}/[\text{время}].$$

Мы видим, что в системе СГС электрический заряд измеряется в единицах с размерностью $г^{1/2}\cdot см^{3/2}\cdot сек^{-1}$. Про два равных точечных заряда, которые отталкивают друг друга с силой в одну дину, когда они находятся на расстоянии в один сантиметр, можно сказать, что они имеют величину заряда 1 $г^{1/2}\cdot см^{3/2}\cdot сек^{-1}$.

Но такую неуклюжую размерность единицы заряда неудобно ни произносить, ни писать, так что эту единицу предпочитают называть электростатической единицей заряда СГСЭ_q. Это означает, что два равных точечных заряда, каждый в одну единицу СГСЭ_q, отталкивают друг друга с силой в одну дину, когда расстояние

*) «Физика», пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова, «Наука», 1965.

между ними равно одному сантиметру. Единица $СГСЭ_q$— это единица электростатического заряда в гауссовой системе единиц СГС *). Можно также сказать, что это единица электрического заряда в электростатической системе единиц.

Заряд q_p протона обозначается здесь и дальше во всем курсе символом e: $e = +4{,}8022 \cdot 10^{-10}$ ед. $СГСЭ_q$. Мы называем e *элементарным зарядом*. Экспериментально доказано, что заряд q_e электрона равен $-e$.

Из уравнения (2) следует, что величина силы, действующей между двумя протонами, находящимися на расстоянии 10^{-12} *см* друг от друга, равна

$$F \cong \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ед. СГСЭ}_q)^2}{(10^{-12}\ \textit{см})^2} = \frac{23 \cdot 10^{-20}\ \textit{дин}}{10^{-24}} \cong 2{,}3 \cdot 10^5\ \textit{дин}. \qquad (3)$$

Между двумя протонами действует сила отталкивания. Величина силы, действующей между протоном и электроном, отстоящими друг от друга на то же расстояние 10^{-12} *см*, также определяется из расчета (3), но это будет уже сила притяжения, потому что заряды имеют противоположные знаки.

Очень удобно, особенно при решении задач со сложным расположением многих зарядов, определять силу, действующую на единичный положительный заряд. Для этого представим себе положительный пробный заряд величиной в 1 ед. $СГСЭ_q$. Предположим, далее, что этот пробный заряд можно перемещать в пространстве от точки к точке, оставляя все остальные заряды неподвижными, а сила, действующая на пробный заряд, может быть измерена в любой заданной точке; измерение должно производиться в условиях, когда пробный заряд неподвижно находится в данной точке. Как и любая сила, измеряемая сила, действующая на единичный положительный заряд, является векторной величиной; она называется *напряженностью электрического поля* **E** в данной точке.

Размерность единицы E — это сила, приходящаяся на единичный заряд. Сила измеряется в динах, а заряд — в единицах $СГСЭ_q$, так что размерность электростатической единицы напряженности электрического поля — это дина на единицу $СГСЭ_q$. Обычно размерность единицы напряженности электрического поля выражают иначе. Мы определяем единицу напряженности электрического поля как такую величину:

$$1\ \frac{\text{единица потенциала СГСЭ}}{\textit{см}} \equiv 1\ \frac{\textit{дин}}{\text{единица заряда СГСЭ}}.$$

Здесь введена размерность единицы напряженности, равная единице потенциала СГСЭ на сантиметр, потому что (как мы подробно узнаем в гл. 5) целесообразно дать специальное название (единица потенциала СГСЭ) единице произведения электрической напряжен-

*) Имея в виду студентов, ранее не встречавшихся с гауссовой системой единиц, мы ниже подробно разбираем эти единицы на ряде примеров.

ности на длину. Если единица этого произведения называется единицей потенциала СГСЭ, то единица напряженности получает размерность: единица потенциала СГСЭ/*см* (ед. СГСЭ$_v$/*см*). Мы могли бы обойтись и без специальных наименований для единиц электрического заряда и напряженности, но удобнее, когда они есть. Следует всегда помнить, что точечный заряд величиной в 1 ед. СГСЭ$_q$ создает на расстоянии 1 *см* электрическое поле напряженностью в 1 ед. СГСЭ$_v$/*см*.

Можно построить трехмерную схему электрического поля, созданного системой неподвижных зарядов. Каждой точке пространства мы приписываем вектор, имеющий абсолютную величину и направление напряженности электрического поля **E**. Может быть, будет яснее, если сказать, что мы приписываем каждой точке тройку чисел, представляющих собой величины составляющих этого вектора E_x, E_y, E_z. Такая схема называется векторным полем.

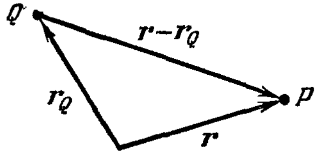

Рис. 4.2. Напряженность электрического поля, создаваемого в точке с радиусом-вектором r зарядом Q, находящимся в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_Q$, равна
$$E(\mathbf{r}) = \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_Q|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_Q).$$
P — точка наблюдения.

Предположим, что в некоторой части пространства имеется электрическое поле, характеризуемое вектором напряженности **E**. Тогда можно написать, что сила, действующая в какой-то точке данной части пространства на любой электрический заряд величиной q, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{4}$$

Здесь **F** зависит от того, в какой точке находится заряд q, потому что **E** следует брать для этой точки. Если поле **E** создается одиночным зарядом Q, находящимся в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_Q$, то согласно уравнению (2) мы можем написать, что вектор **E** в любой точке с радиусом-вектором **r** равен

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_Q|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_Q). \tag{5}$$

Здесь в знаменателе находится куб величины $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_Q|$, потому что в числитель входит вектор с абсолютной величиной $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_Q|$. Если поместить начало координат в точку, где находится заряд Q, то $\mathbf{r}_Q = 0$, и можно переписать уравнение (5) в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r^3}\mathbf{r} = \frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{6}$$

Здесь в правую часть входит единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}$, направленный из начала координат в ту точку с радиусом-вектором **r**, в которой измеряется величина напряженности. Пользуясь уравнением (6), можно определить силу, действующую на заряд q, находящийся в точке с радиусом-вектором **r**:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{7}$$

и это согласуется с уравнением (2).

Электростатическая сила

$$\mathbf{F}_{эл} = q\mathbf{E} \tag{8}$$

— это та составляющая всей силы, действующей на заряд q, которая возникает из-за действия электрического поля. Если заряд неподвижен относительно наблюдателя, то может быть, что на этот заряд не действуют никакие другие силы (мы не говорим о действии сил тяготения, потому что они обычно очень слабы по сравнению с электростатическими силами). Но если пробный заряд или заряд q движется, то, как экспериментально установлено, может быть еще одна составляющая силы, действующей на заряд. Это дополнительная сила прямо пропорциональна скорости **v**, с которой заряд движется относительно наблюдателя, если движение совершается с постоянной скоростью. Из опыта известно, что для этой дополнительной динамической или магнитной силы мы можем написать следующее уравнение:

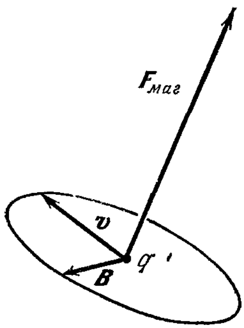

Рис. 4.3. $\mathbf{F}_{маг} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$.

$$\mathbf{F}_{маг} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \tag{9}$$

где c — скорость света, **v** — скорость движения заряда, а **B** — векторная величина, называемая индукцией магнитного поля (рис. 4.3). С помощью уравнения (9) можно дать определение величины **B**. Этот вопрос подробно обсуждается в т. II, а на данном этапе появление c в уравнении (9) связано только с удобством определения магнитной индукции **B**; при таком определении величина **B** имеет ту же размерность, что и напряженность электрического поля **E**. Мы получили одинаковые размерности для **B** и для **E** именно потому, что разделили v на c. Сила $\frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, действующая на электрический заряд в магнитном поле,— это та сила, которая заставляет двигаться провод с током в магнитном поле, перпендикулярном к проводу. Для единицы индукции магнитного поля имеется в гауссовой системе единиц СГС специальное название: *гаусс* (*гс*).

Определим величину силы, действующей на электрон, движущийся в магнитном поле с индукцией 10 000 *гс*, которое может быть создано небольшим лабораторным электромагнитом. Если скорость электрона равна $3\cdot10^8$ *см/сек* и направлена перпендикулярно к индукции магнитного поля **B**, то согласно уравнению (9) величина этой силы равна

$$F=(4{,}8\cdot10^{-10}\text{ ед. СГСЭ}_q)\cdot\frac{(3\cdot10^{8}\ \textit{см/сек})}{(3\cdot10^{10}\ \textit{см/сек})}\cdot(1\cdot10^{4}\ \textit{гс})=4{,}8\cdot10^{8}\ \textit{дин}.$$

Из приведенного расчета видно, что индукция магнитного поля имеет размерность: [сила]/[заряд], как и напряженность электрического поля. Однако удобно иметь отдельное название для единицы индукции магнитного поля — и вот почему мы говорим «гаусс» для магнитного поля и «единица СГСЭ$_v$/*см*» для электрического поля.

Источником магнитного поля может быть петля с током, соленоид или постоянный магнит. Магнитная сила $\mathbf{F}_{\text{маг}}$ направлена по нормали к плоскости, образованной векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$. Ниже в этой главе мы покажем, что заряженная частица, движущаяся только в магнитном поле, будет описывать окружность (или, в более общем случае, спираль) вокруг оси, образуемой направлением магнитного поля. Проделав лабораторный опыт, легко можно убедиться, что магнитное поле, направленное перпендикулярно к движению электронного пучка в трубке осциллографа, отклонит этот пучок в направлении, перпендикулярном как к $\mathbf{v}$, так и к $\mathbf{B}$. Магнитная сила, соленоиды и магниты подробно разбираются в т. II.

Результирующая сила, действующая на равномерно движущуюся частицу с зарядом q, представляет собой сумму электростатической и магнитной сил (8) и (9). Эта результирующая сила или только одна сила (9) называется силой Лоренца:

$$\boxed{\mathbf{F}=q\mathbf{E}+\frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}.}\qquad(10)$$

Многие положения физики выводятся из уравнения второго закона Ньютона $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$, применяемого совместно с уравнением (10), и значительная часть истории физики связана со способами, которыми были установлены и подтверждены эти уравнения. То, что мы написали здесь уравнение (10) как экспериментальный факт, вовсе не освобождает нас от необходимости глубоко проанализировать его в т. II.

В этой главе мы предполагаем, что кинетическая энергия частицы равна $^1/_2Mv^2$, и разбираем только такие задачи, в которых электрическое и магнитное поля однородны (под словом однородный мы подразумеваем — не зависящий от положения частицы, под словом постоянный — не зависящий от времени наблюдения). Обсуждение электростатического потенциала и напряжения мы откладываем до гл. 5.

Нам потребуются следующие числовые величины: скорость света

$$c=2{,}9979\cdot10^{10}\ \textit{см/сек},$$

масса электрона m

$$m=0{,}9107\cdot10^{-27}\ \textit{г},$$

масса протона M_p

$$M_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-24}\ г.$$

Оперируя с силой Лоренца (10), мы выражаем в гауссовой системе единиц F в динах, E в ед. СГСЭ$_v$/*см*, v в *см/сек* и B в гауссах. Для перевода числовых значений этих величин из единиц системы СИ (или МКСА) в единицы системы СГС применяются следующие пересчетные множители: величина F в динах получается умножением на 10^5 величины F в ньютонах; величина E в ед. СГСЭ$_v$/*см* получается умножением величины E в *в/м* или в *н/к* на $10^6/c \cong {}^1/_3 \cdot 10^{-4}$. Если же величина E дана в *в/см*, то для перевода в единицы системы СГС надо умножить ее на значение на $10^8/c \cong 1/300$. Величина B в гауссах получается умножением этой величины в веберах/$м^2$ (в тесла) на 10^4. Не следует задумываться над числовыми значениями приведенных пересчетных множителей, их только надо применять, где это необходимо.

4.2. Заряженная частица в однородном постоянном электрическом поле

Сила, действующая на частицу с зарядом q и массой M в электрическом поле $\mathbf{E}$, однородном в пространстве и постоянном во времени, определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = q\mathbf{E}. \tag{11}$$

Из (11) следует уравнение для определения ускорения заряженной частицы:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{M}\mathbf{E}. \tag{12}$$

Этот результат очень похож на уравнение движения материальной точки в однородном гравитационном поле у поверхности Земли: $\mathbf{F} = -Mg\hat{\mathbf{z}}$, где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор, направленный наружу от центра Земли. Уравнение движения в гравитационном поле имеет вид $M\mathbf{a} = -Mg\hat{\mathbf{z}}$, или $\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{z}}$. Если вам сначала будет трудно наглядно представить себе движение заряженной частицы в электрическом поле, вообразите вместо этого движение материальной точки в гравитационном поле, действующем в том же направлении. Движение в гравитационном поле уже было исчерпывающе разобрано в школьном курсе физики.

Выполнив интегрирование, можно показать, что уравнение (12) имеет следующее общее решение:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{F}}{2M} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \tag{13}$$

Напомним правило дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}. \tag{14}$$