масса протона M_p

$$M_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-24}\ г.$$

Оперируя с силой Лоренца (10), мы выражаем в гауссовой системе единиц F в динах, E в ед. СГСЭ$_v$/*см*, v в *см/сек* и B в гауссах. Для перевода числовых значений этих величин из единиц системы СИ (или МКСА) в единицы системы СГС применяются следующие пересчетные множители: величина F в динах получается умножением на 10^5 величины F в ньютонах; величина E в ед. СГСЭ$_v$/*см* получается умножением величины E в *в/м* или в *н/к* на $10^6/c \cong {}^1/_3 \cdot 10^{-4}$. Если же величина E дана в *в/см*, то для перевода в единицы системы СГС надо умножить ее на значение на $10^8/c \cong 1/300$. Величина B в гауссах получается умножением этой величины в веберах/*м*^{2} (в тесла) на 10^4. Не следует задумываться над числовыми значениями приведенных пересчетных множителей, их только надо применять, где это необходимо.

4.2. Заряженная частица в однородном постоянном электрическом поле

Сила, действующая на частицу с зарядом q и массой M в электрическом поле $\mathbf{E}$, однородном в пространстве и постоянном во времени, определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = q\mathbf{E}. \tag{11}$$

Из (11) следует уравнение для определения ускорения заряженной частицы:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{M}\mathbf{E}. \tag{12}$$

Этот результат очень похож на уравнение движения материальной точки в однородном гравитационном поле у поверхности Земли: $\mathbf{F} = -Mg\hat{\mathbf{z}}$, где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор, направленный наружу от центра Земли. Уравнение движения в гравитационном поле имеет вид $M\mathbf{a} = -Mg\hat{\mathbf{z}}$, или $\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{z}}$. Если вам сначала будет трудно наглядно представить себе движение заряженной частицы в электрическом поле, вообразите вместо этого движение материальной точки в гравитационном поле, действующем в том же направлении. Движение в гравитационном поле уже было исчерпывающе разобрано в школьном курсе физики.

Выполнив интегрирование, можно показать, что уравнение (12) имеет следующее общее решение:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{F}}{2M} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \tag{13}$$

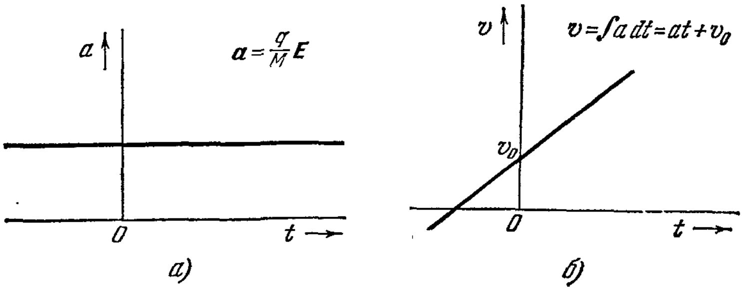
Напомним правило дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} t^n = nt^{n-1}. \tag{14}$$

Возникает естественный вопрос: откуда берутся в решении (13) слагаемые $\mathbf{v}_0 t+\mathbf{r}_0$? Очевидно, что выражение

$$\mathbf{r}(t)=\frac{q\mathbf{E}}{2M}t^2 \tag{15}$$

само удовлетворяет уравнению (12). Мы называем уравнение (12) *дифференциальным уравнением*, потому что в это уравнение входит производная, в данном случае вторая производная от $\mathbf{r}$ по времени t. Согласно уравнению (15) $\mathbf{r}=0$ при $t=0$. Но из дифференциального уравнения (12) вовсе не следует, что в момент $t=0$ частица должна



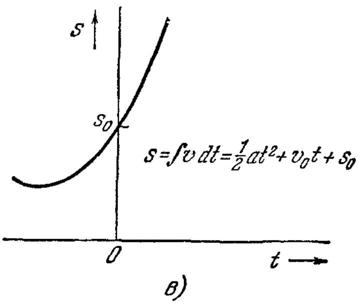


Рис. 4.4. *а*) Частица, находящаяся в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$, имеет постоянное ускорение $\mathbf{a}$. *б*) Ее скорость линейно возрастает в зависимости от времени, а величина перемещения s представляет собой квадратичную функцию времени (*в*).

находиться в начале координат. Заряженная частица может быть в любом начальном положении $\mathbf{r}_0$. Чтобы получить данное начальное положение, мы вводим в решение для $\mathbf{r}$ постоянное слагаемое $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{r}(t)=\frac{q\mathbf{E}}{2M}t^2+\mathbf{r}_0. \tag{16}$$

Поскольку $\mathbf{r}_0$ — постоянная величина, мы можем прибавить ее к решению, а дифференциальное уравнение (12) все-таки будет выполняться.

Скорость $\mathbf{v}$ получается дифференцированием $\mathbf{r}$ по времени. Если бы $\mathbf{r}$ определялось из уравнения (16), то мы получили бы для скорости следующее уравнение:

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q\mathbf{E}}{2M}t^2\right)=\frac{q\mathbf{E}}{M}t, \tag{17}$$

т. е. скорость обращалась бы в нуль при $t=0$. Однако из дифференциального уравнения (12) не следует также, что скорость должна быть равна нулю при $t=0$; скорость может иметь любое заданное начальное значение $\mathbf{v}_0$. Мы учитываем эту заданную начальную скорость, добавляя слагаемое $\mathbf{v}_0 t$ к решению (16) для $\mathbf{r}$. Введение этого слагаемого не противоречит дифференциальному уравнению, а также не изменяет начального положения частицы, потому что $\mathbf{v}_0 t=0$ при $t=0$. Слагаемое $\mathbf{v}_0 t$ удовлетворяет начальному условию для скорости, и теперь $\mathbf{r}$ задается уравнением (13), из которого следует:

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q\mathbf{E}}{2M}t^2+\mathbf{v}_0 t+\mathbf{r}_0\right)=\frac{q\mathbf{E}}{M}t+\mathbf{v}_0. \tag{18}$$

Мы видим, что $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$ при $t=0$, что и требовалось. Решение (13) удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) и *начальным* или *граничным условиям* для положения и скорости заряженной частицы.

П р и м е р. *Ускоренное движение протона в направлении электрического поля.* Пусть в течение одной наносекунды (10^{-9} *сек*) протон ускоряется, начиная с состояния покоя, электрическим полем напряженностью $E_x=1$ ед. СГСЭ$_\text{v}$/*см*. Какова его конечная скорость?

Скорость частицы определяется из уравнения (18):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{e}{M}\mathbf{E}t+\mathbf{v}_0; \tag{19}$$

для нашей задачи это векторное уравнение *) сводится к следующей системе числовых уравнений:

$$v_x(t)=\frac{e}{M}E_x t, \qquad v_y=v_z=0, \tag{20}$$

потому что мы имеем условие, что $\mathbf{v}=0$ при $t=0$. Следовательно, конечная скорость при $t=10^{-9}$ *сек* приближенно равна

$$v_x\approx\frac{(5\cdot 10^{-10}\ \text{ед. СГСЭ}_\text{q})\cdot(1\ \text{ед. СГСЭ}_\text{v}/\textit{см})\cdot 10^{-9}\ \textit{сек}}{2\cdot 10^{-24}\ \textit{г}}\approx 3\cdot 10^5\ \textit{см/сек}. \tag{21}$$

Мы приняли массу протона приближенно равной $2\cdot 10^{-24}$ *г*. Заметьте, что (1 ед. СГСЭ$_\text{q}$)$\cdot$(1 ед. СГСЭ$_\text{v}$/*см*) $\equiv$ 1 *дин* $\equiv$ 1 *г$\cdot$см/сек*^{2}.

П р и м е р. *Ускоренное движение электрона в направлении электрического поля.* Электрон, который вначале был неподвижным, ускоряется на пути в 1 *см* электрическим полем напряженностью 1 ед. СГСЭ$_\text{v}$/*см*. Какова конечная скорость электрона?

---

*) Уравнение (19) — векторное; если $\mathbf{E}=(E_x, 0, 0)$, а $\mathbf{v}_0=0$, то оно сводится к трем числовым уравнениям относительно составляющих:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e}{M}E_x t, \quad \frac{dy}{dt}=0, \quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Подставив в уравнение (18) заряд электрона $-e$ и его массу m, получаем

$$v_x(t) = -\frac{e}{m} E_x t, \quad x(t) = -\frac{e}{2m} E_x t^2. \tag{22}$$

Нам надо исключить t и выразить v_x как функцию от x. Удобно сначала найти выражение для v_x^2, а затем преобразовать его, используя вторую формулу (22):

$$v_x^2 = \left(\frac{e}{m} E_x t\right)^2 = \left(\frac{2e}{m} E_x\right)\left(\frac{e}{2m} E_x t^2\right) = -\frac{2e}{m} E_x x \approx$$
$$\approx \frac{2\cdot 5\cdot 10^{-10}}{10^{-27}}\cdot 1\cdot 1\ \textit{см}^2/\textit{сек}^2 \approx 10^{-9}\cdot 10^{27}\ \textit{см}^2/\textit{сек}^2 \approx 10^{18}\ \textit{см}^2/\textit{сек}^2. \tag{23}$$

Отсюда следует, что конечная скорость электрона равна

$$|v_x| \approx 10^9\ \textit{см/сек}. \tag{24}$$

Из рис. 4.1, приведенного в начале этой главы, видно, что для многих практических целей можно считать эту скорость нерелятивистской (с точностью 1%).

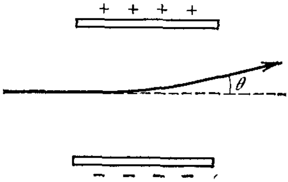


Рис. 4.5. Отклонение электронного пучка поперечным электрическим полем.

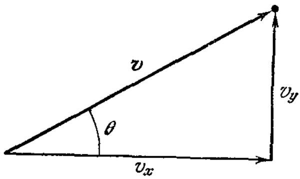


Рис. 4.6. Вектор скорости $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} v_x + \hat{\mathbf{y}} v_y$; $\theta = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x}$

Пример. *Ускорение в направлении, перпендикулярном к начальной скорости частиц.* Пройдя через ускоряющее поле E_x (см. предыдущий пример), пучок электронов попадает в зону длиной $L = 1$ *см*, где действует поперечно направленное отклоняющее электрическое поле напряженностью $E_y = -0{,}1$ ед. СГСЭ$_v$/*см*. Какой угол с осью x образует скорость пучка электронов, прошедшего эту зону поперечного отклонения?

Ввиду того, что теперь нет составляющей напряженности поля по оси x, составляющая скорости вдоль этой оси останется постоянной. Время τ, в течение которого электрон будет находиться в зоне действия отклоняющего поля, определяется из уравнения:

$$v_x \tau = L \tag{25}$$

или, если $v_x = 10^9$ *см/сек*,

$$\tau = \frac{L}{v_x} = 10^{-9}\ \textit{сек}. \tag{26}$$

Скорость в поперечном направлении, приобретенная за это время, определяется так:

$$v_v = -\frac{e}{m} E_y \tau \approx \frac{5\cdot 10^{-10}}{10^{-27}} \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-9} \text{ см/сек} \approx 5\cdot 10^{7} \text{ см/сек}. \quad (27)$$

Угол θ, который образует с осью x вектор конечной скорости, можно определить из равенства $\operatorname{tg}\theta = v_y/v_x$, т. е.

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} \approx \operatorname{arctg}\frac{5\cdot 10^7}{10^9} = \operatorname{arctg}\ 0{,}05. \quad (28)$$

Для малых значений угла θ мы можем использовать приближенное равенство

$$\theta \cong \operatorname{arctg}\theta, \quad (29)$$

где θ выражено в радианах. Из (28) следует, что $\theta \approx 0{,}05$ *рад*.

Определив числовое значение следующего слагаемого в разложении $\operatorname{arctg} x$, мы можем оценить величину ошибки из-за применения приближенного равенства (29). В математических справочниках *) дается разложение тригонометрических функций в ряды. В частности, следующее разложение $\operatorname{arctg} x$ в ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad (30)$$

выполняется при $x^2 < 1$.

При $x = 0{,}05$ слагаемое $x^3/3$, которое меньше основного слагаемого x в $x^2/3$ раза, составляет $(0{,}05)^2/3 \cong 10^{-3}$ долю его, или 0,1%. Эту ошибку можно не учитывать, если она меньше, чем экспериментальная ошибка при измерении θ. Для малых углов применимы также следующие приближенные равенства: $\sin\theta \cong \theta$ и $\cos\theta \cong 1 - \theta^2/2$.

4.3. Заряженная частица в однородном переменном электрическом поле

Пусть

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x = \hat{\mathbf{x}} E_x^0 \sin\omega t, \quad (31)$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, а E_x^0 — амплитуда вектора напряженности электрического поля. Часто значок нуль (0) при букве E не пишется, если это не приводит к недоразумению. Согласно (12) уравнение движения заряженной частицы примет в этом случае следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin\omega t. \quad (32)$$

При решении дифференциальных уравнений мы часто будем пользо-

---

*) Здесь авторы рекомендуют книгу H. B. Dwight, Tables of integrals and other mathematical data, 4th ed., Macmillan, New York, 1961 (русский перевод: Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, пер. с англ. под ред. К. А. Семендяева, 2-е изд., «Наука», 1966) как математический справочник и книгу: Handbook of Chemistry a. Physics (Chemical Rubber Publishing Company) как справочник по химии и физике.

Из отечественной литературы можно указать, например, М. Я. Выгодский, Справочник по высшей математике, «Наука», 1964. (*Прим. ред.*)