определяется так:

$$v_v = -\frac{e}{m} E_y \tau \approx \frac{5 \cdot 10^{-10}}{10^{-27}} \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-9} \text{ см/сек} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ см/сек}. \quad (27)$$

Угол θ, который образует с осью x вектор конечной скорости, можно определить из равенства $\operatorname{tg}\theta = v_y/v_x$, т. е.

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} \approx \operatorname{arctg}\frac{5 \cdot 10^7}{10^9} = \operatorname{arctg}\ 0{,}05. \quad (28)$$

Для малых значений угла θ мы можем использовать приближенное равенство

$$\theta \cong \operatorname{arctg}\theta, \quad (29)$$

где θ выражено в радианах. Из (28) следует, что $\theta \approx 0{,}05$ *рад*.

Определив числовое значение следующего слагаемого в разложении $\operatorname{arctg} x$, мы можем оценить величину ошибки из-за применения приближенного равенства (29). В математических справочниках *) дается разложение тригонометрических функций в ряды. В частности, следующее разложение $\operatorname{arctg} x$ в ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad (30)$$

выполняется при $x^2 < 1$.

При $x=0{,}05$ слагаемое $x^3/3$, которое меньше основного слагаемого x в $x^2/3$ раза, составляет $(0{,}05)^2/3 \cong 10^{-3}$ долю его, или 0,1%. Эту ошибку можно не учитывать, если она меньше, чем экспериментальная ошибка при измерении θ. Для малых углов применимы также следующие приближенные равенства: $\sin\theta \cong \theta$ и $\cos\theta \cong 1 - \theta^2/2$.

4.3. Заряженная частица в однородном переменном электрическом поле

Пусть

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x = \hat{\mathbf{x}} E_x^0 \sin\omega t, \quad (31)$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, а E_x^0 — амплитуда вектора напряженности электрического поля. Часто значок нуль (0) при букве E не пишется, если это не приводит к недоразумению. Согласно (12) уравнение движения заряженной частицы примет в этом случае следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin\omega t. \quad (32)$$

При решении дифференциальных уравнений мы часто будем пользо-

---

*) Здесь авторы рекомендуют книгу H. B. Dwight, Tables of integrals and other mathematical data, 4th ed., Macmillan, New York, 1961 (русский перевод: Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, пер. с англ. под ред. К. А. Семендяева, 2-е изд., «Наука», 1966) как математический справочник и книгу: Handbook of Chemistry a. Physics (Chemical Rubber Publishing Company) как справочник по химии и физике.

Из отечественной литературы можно указать, например, М. Я. Выгодский, Справочник по высшей математике, «Наука», 1964. (*Прим. ред.*)

ваться широко применимым методом проб и ошибок, исходя при этом из понимания физического смысла явления. Будем искать решение уравнения (32) в следующем виде *):

$$x(t) = x_1 \sin \omega t + v_0 t + x_0. \tag{33}$$

Продифференцировав (33) дважды, находим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \sin \omega t. \tag{34}$$

Производные синуса и косинуса определяются по формулам:

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \sin \theta = -\sin \theta,$$

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \cos \theta = -\cos \theta.$$

Следовательно, (33) представляет собой решение уравнения движения (32) при том условии, что

$$-\omega^2 x_1 \sin \omega t = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t, \tag{35}$$

$$x_1 = -\frac{q E_x^0}{M \omega^2}. \tag{36}$$

Подставляя (36) в (33), получаем следующий результат:

$$x(t) = -\frac{q E_x^0}{M \omega^2} \sin \omega t + v_0 t + x_0. \tag{37}$$

Скорость частицы равна

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{q E_x^0}{M \omega} \cos \omega t + v_0, \tag{38}$$

---

*) Здесь мы встречаемся с одним из общих приемов решения физических задач — нахождением решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Это своего рода искусство, в котором важную роль играют интуитивные предположения. Иногда помогают и строго сформулированные математические правила, но обычно физик спрашивает себя: «Что могло бы произойти?» или «Чего еще можно было бы ожидать?» Получив решение, надо подставить предполагаемый результат в исходное уравнение, чтобы убедиться, является ли этот результат правильным. Если же исходные предположения оказались неверными, то надо делать новые попытки. Разумное построение предположений помогает сберечь время, но иногда даже неверные предположения могут навести на правильный путь решения задачи.

Согласно уравнению (32) ускорение заряженной частицы должно быть синусоидальной функцией времени, если действующая сила изменяется по синусоидальному закону. Поскольку ускорение имеет колебательный характер, перемещение должно быть хотя бы частично колебательным. По этой причине мы вводим в уравнение (33) слагаемое, пропорциональное $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$. Мы выбираем $\sin \omega t$, потому что два последовательных дифференцирования функции синуса дают опять синус. Слагаемое x_0 надо внести как начальное смещение. Поскольку мы должны предусмотреть также начальную скорость, то мы добавляем слагаемое $v_0 t$, которое дает возможность учесть любую величину начальной скорости, в том числе нулевую. Слагаемое $v_0 t$ остается и позже, как постоянная скорость, наложенная на скорость, величина которой колеблется. Единственно возможной формой этого слагаемого является $v_0 t$; более высокая степень t не согласуется с (32).

Примечание. Из уравнения (38) видно, что для этого примера, в отличие от рассмотренных ранее, скорость при $t=0$ не равна одной только величине v_0.

откуда следует, что при $t=0$

$$v_x(0) = -\frac{qE_x^0}{M\omega} + v_0. \tag{39}$$

Не надо смешивать величину $v_x(0)$, равную скорости частицы при $t=0$, с величиной v_0, представляющей собой постоянную, подбираемую для того, чтобы начальная скорость $v_x(0)$ приобрела заданное значение.

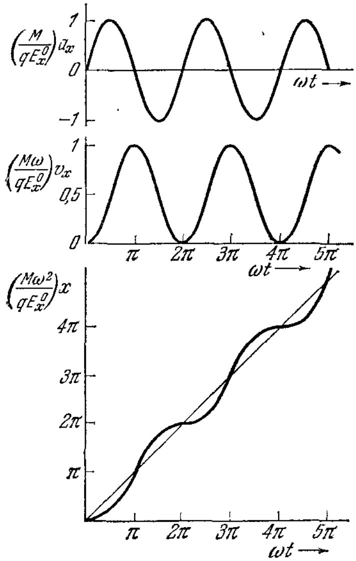

Рис. 4.7. Если заряд q находится в электрическом поле напряженностью $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x^0 \sin \omega t$, то

$$a_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin \omega t$$

и

$$v_x(t) = \int a_x \, dx = -\frac{qE_x^0}{M\omega} \cos \omega t + v_0.$$

Если $v_x(0) = 0$, то

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega},$$

или

$$v_x(t) = \frac{qE_x^0}{M\omega}(1 - \cos \omega t), ..$$

Тогда

$$x(t) = \int v_x(t)\, dt = \frac{qE_x^0}{M\omega} \int (1 - \cos \omega t)\, dt + x(0).$$

Если также $x(0) = 0$, то

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2} \sin \omega t + \frac{q}{M\omega} E_x^0 t.$$

Если мы примем начальную скорость частицы равной нулю, то получим

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega}. \tag{40}$$

Подстановка этого выражения в (37) приводит к следующему соотношению:

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2} \sin \omega t + \frac{qE_x^0}{M\omega} t + x_0. \tag{41}$$

Нами получен несколько неожиданный результат: если начальное условие имеет вид $v_x=0$ при $t=0$, то движение частицы слагается из колебания и поступательного движения, совершаемого в одном и том же направлении с постоянной скоростью $qE_x^0/M\omega$ (рис. 4.7). Это происходит потому, что в данной частной задаче скорость частицы никогда не изменяет знака. Частица непрерывно перемещается в одном и том же направлении. Заметьте, что для этой задачи v_0 не равно v_x ($t=0$), но x_0 равно $x(t=0)$.

4.4. Заряженная частица в постоянном магнитном поле

Уравнение движения частицы, имеющей массу M и заряд q, в постоянном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ имеет следующий вид:

$$M \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{42}$$