откуда следует, что при $t=0$

$$v_x(0) = -\frac{qE_x^0}{M\omega} + v_0. \tag{39}$$

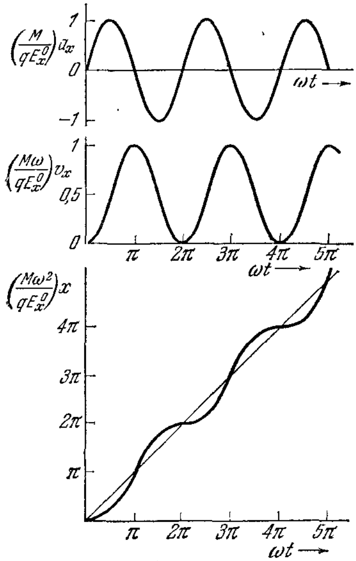

Рис. 4.7. Если заряд q находится в электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}E_x^0 \sin\omega t$, то

$$a_x = \frac{q}{M} E_x^0 \sin\omega t$$

и

$$v_x(t) = \int a_x\, dx = -\frac{qE_x^0}{M\omega}\cos\omega t + v_0.$$

Если $v_x(0)=0$, то

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega},$$

или

$$v_x(t) = \frac{qE_x^0}{M\omega}(1-\cos\omega t), ..$$

Тогда

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt = \frac{qE_x^0}{M\omega}\int (1-\cos\omega t)\,dt + x(0).$$

Если также $x(0)=0$, то

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2}\sin\omega t + \frac{q}{M\omega}E_x^0 t.$$

Не надо смешивать величину $v_x(0)$, равную скорости частицы при $t=0$, с величиной v_0, представляющей собой постоянную, подбираемую для того, чтобы начальная скорость $v_x(0)$ приобрела заданное значение.

Если мы примем начальную скорость частицы равной нулю, то получим

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega}. \tag{40}$$

Подстановка этого выражения в (37) приводит к следующему соотношению:

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2}\sin\omega t + \frac{qE_x^0}{M\omega}t + x_0. \tag{41}$$

Нами получен несколько неожиданный результат: если начальное условие имеет вид $v_x=0$ при $t=0$, то движение частицы слагается из колебания и поступательного движения, совершаемого в одном и том же направлении с постоянной скоростью $qE_x^0/M\omega$ (рис. 4.7). Это происходит потому, что в данной частной задаче скорость частицы никогда не изменяет знака. Частица непрерывно перемещается в одном и том же направлении. Заметьте, что для этой задачи v_0 **не равно** v_x $(t=0)$, но x_0 равно $x(t=0)$.

4.4. Заряженная частица в постоянном магнитном поле

Уравнение движения частицы, имеющей массу M и заряд q, в постоянном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ имеет следующий вид:

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{42}$$

Пусть индукция магнитного поля направлена вдоль оси z:

$$\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}B. \tag{43}$$

Отсюда следует согласно правилу определения составляющих векторного произведения:

$$[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_x=v_yB,\quad [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_y=-v_xB,\quad [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_z=0, \tag{44}$$

и, таким образом, уравнение (42) приводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{v}_x=\frac{q}{Mc}v_yB,\quad v_y=-\frac{q}{Mc}v_xB,\quad \dot{v}_z=0. \tag{45}$$

Мы видим, что остается постоянной составляющая скорости, параллельная оси, вдоль которой направлено магнитное поле, т. е. оси z. Можно непосредственно обнаружить и другую особенность данного движения: остается постоянной также кинетическая энергия

$$K=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M\mathbf{v}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{v}, \tag{46}$$

так как

$$\frac{dK}{dt}=\frac{M}{2}(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\boldsymbol{\cdot}\dot{\mathbf{v}})=M\mathbf{v}\boldsymbol{\cdot}\dot{\mathbf{v}}=M\mathbf{v}\boldsymbol{\cdot}\left(\frac{q}{Mc}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\equiv 0, \tag{47}$$

потому что векторное произведение $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ перпендикулярно к $\mathbf{v}$. Следовательно, *магнитное поле не изменяет кинетическую энергию свободной частицы*. Будем искать решение *) системы уравнений движения (45) в следующем виде:

$$v_x(t)=v_1\sin\omega t,\qquad v_y(t)=v_1\cos\omega t. \tag{48}$$

Это — уравнения кругового движения. Из них следует:

$$\frac{dv_x}{dt}=\omega v_1\cos\omega t,\qquad \frac{dv_y}{dt}=-\omega v_1\sin\omega t, \tag{49}$$

и после подстановки решений (48) система уравнений (45) принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\omega v_1\cos\omega t&=\frac{qB}{Mc}v_1\cos\omega t,\\ -\omega v_1\sin\omega t&=-\frac{qB}{Mc}\sin\omega t.\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Уравнения (50) тождественно выполняются при условии, что

$$\boxed{\omega=\frac{qB}{Mc}\equiv\omega_{\text{ц}},} \tag{51}$$

*) Из уравнения (47) следует, что кинетическая энергия K постоянна; мы должны отсюда сделать вывод, что величина $|\mathbf{v}|$ также постоянна. Этот результат и наводит на мысль испробовать решение, выражающее равномерное круговое движение, при котором составляющие скорости по осям x и y изменяются по синусоидальному закону с разностью фаз $\pi/2$. Удобно выразить дробь qB/Mc в виде одной постоянной, имеющей размерность времени в минус первой степени; эту размерность легко можно обнаружить, пользуясь уравнениями (45). Мы предполагаем, что решение задачи представляет собой вращательное движение, угловая скорость которого как-то связана с этой постоянной.

а из этого соотношения определяется так называемая *циклотронная частота* (или *гироскопическая частота*) $\omega_ц$, т. е. частота движения заряженной частицы в магнитном поле. Уравнения (50) удовлетворяются при любом значении v_1.

Можно вывести уравнение для циклотронной частоты также элементарным способом. Направленная внутрь траектории частицы магнитная сила qBv_1/c создает центростремительное (направленное внутрь) ускорение, необходимое для кругового движения этой частицы. Величина центростремительного

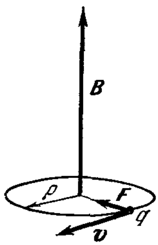

Рис. 4.8. Положительный заряд q, движущийся с начальной скоростью **v**, перпендикулярной к индукции **B** однородного магнитного поля, описывает окружность радиусом $\rho = cMv/qB$ с постоянной по абсолютной величине скоростью v.

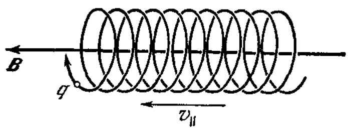

Рис. 4.9. Положительный заряд q описывает в однородном магнитном поле с индукцией **B** спираль с постоянным шагом. При этом $v_\parallel$, т. е. параллельная **B** составляющая скорости заряда, остается постоянной.

ускорения равна v_1^2/r, или $\omega_ц^2 r$, потому что $\omega_ц r = v_1$. Следовательно,

$$\frac{qBv_1}{c} = M\omega_ц^2 r, \tag{52}$$

откуда получаем

$$\omega_ц = \frac{qB}{Mc}.$$

Какой вид имеет эта траектория? Изменение положения частицы в зависимости от времени можно определить, интегрируя уравнения (48), положив в них ω равным $\omega_ц$:

$$x(t) = x_0 - \rho \cos \omega_ц t = x_0 - \frac{v_1}{\omega_ц} \cos \omega_ц t, \tag{53}$$

$$y(t) = y_0 + \rho \sin \omega_ц t = y_0 + \frac{v_1}{\omega_ц} \sin \omega_ц t, \tag{54}$$

$$z(t) = z_0 + v_z t. \tag{55}$$

Мы видим, что проекция траектории частицы на плоскость xy представляет собой окружность с центром в точке x_0, y_0. Радиус этой окружности равен

$$\rho = \frac{v_1}{\omega_ц} = \frac{cMv_1}{qB}. \tag{56}$$

Радиус ρ иногда называется *гироскопическим радиусом* или *циклотронным радиусом*. Траектория этой частицы представляет собой спираль, ось которой направлена параллельно магнитной индукции **B**; составляющая скорости частицы, параллельная **B**, остается постоянной.

Заметим следующее:

$$\boxed{B\rho = \frac{cMv_1}{q},} \tag{57}$$

где Mv_1— это импульс частицы *в плоскости, перпендикулярной* к **B**. Это важное соотношение; в одной из последующих глав мы

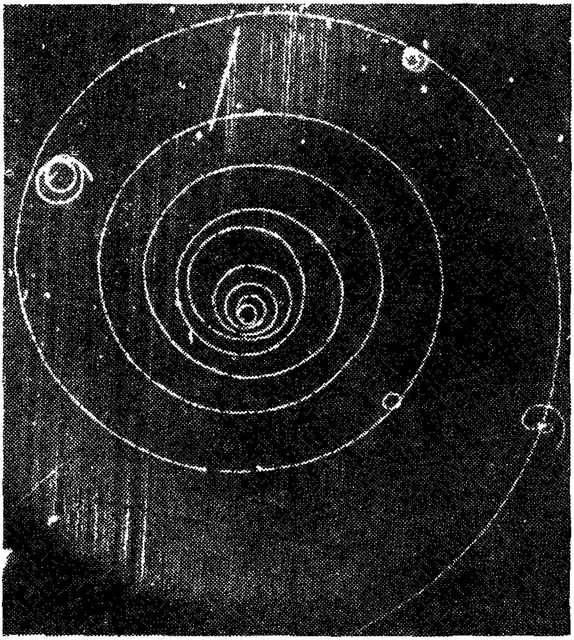

Рис. 4.10. Полученная в водородной пузырьковой камере фотография траектории электрона, движущегося с большой скоростью в магнитном поле. Электрон входит в поле зрения внизу слева. Теряя свою энергию на ионизацию водородных молекул, электрон замедляет движение. Когда уменьшается скорость электрона, уменьшается и радиус кривизны его траектории в магнитном поле. Поэтому траектория имеет форму спирали. (*Радиационная лаборатория им. Лоуренса*)

увидим, что оно выполняется и в релятивистской области скоростей, если вместо Mv_1 подставить в него релятивистский импульс p. Поэтому можно применять соотношение (57) для определения импульсов частиц с очень высокой энергией.

4.5. Размерности

Всегда целесообразно проверить, что размерности обеих частей полученного окончательного уравнения одинаковы. Это легкий способ обнаружить принципиальные ошибки. Для правой части уравнения (57) имеем

$$\left[\frac{cMv_1}{q}\right] = \left[\frac{L}{T}\right][M]\left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{q}\right] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right], \tag{58}$$