

Расчет точности фокусировки представляет собой чисто геометрическую задачу. Рассмотрим траекторию частицы, проходящей через входную щель под углом θ к идеальной траектории (рис. 4.13). Расстояние между входной щелью и точкой, в которой эта траектория пересечет поверхность мишени, равно длине хорды круга с радиусом ρ . Разность длин диаметра и хорды равна

$$2\rho - C = 2\rho(1 - \cos \theta) \approx \rho\theta^2, \quad (66)$$

где для малых θ мы ограничились первыми двумя слагаемыми разложения косинуса в степенной ряд:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots, \quad (67)$$

которое приводится в математических справочниках. Если мы примем в качестве меры четкости угловой фокусировки следующую величину:

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx \frac{1}{2} \theta^2, \quad (68)$$

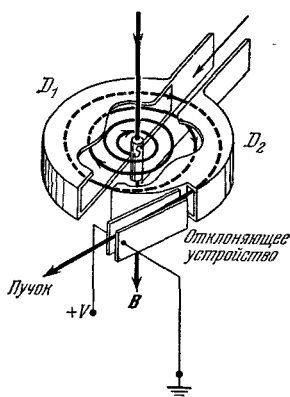
то для $\theta = 0,1$ получаем такое ее значение:

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx 5 \cdot 10^{-3}. \quad (69)$$

Эта величина выражает фокусирующее действие селектора импульсов.

4.7. Принцип ускорения заряженных частиц в циклотроне

Рис. 4.14. Вид в разрезе обычного циклотрона низких энергий, состоящего из источника ионов S , полых ускоряющих электродов в форме D-образных колец (D_1 , D_2) и отклоняющего устройства. Весь прибор находится в однородном вертикальном магнитном поле, вектор индукции которого B направлен вниз. Плоскость траектории частицы горизонтальна и находится посередине между D-образными кольцами. Ускоряющее высокочастотное электрическое поле приложено в промежутке между D-образными кольцами.



В обычном циклотроне заряженные частицы движутся в постоянном магнитном поле по почти спиральным орбитам, как это описано в отрывке «Из истории физики», приводимом в конце главы. После каждого полуоборота частицы ускоряются электрическим полем, изменяющимся по закону колебаний. Для периодического ускорения необходимо, чтобы частота электрического поля была строго равна циклотронной частоте ускоряемых частиц.

Циклотронная частота протонов в магнитном поле с индукцией 10 кгс равна

$$\omega_{ц} = \frac{eB}{M_p c} \approx \frac{(5 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^4}{(2 \cdot 10^{-24}) \cdot (3 \cdot 10^{10})} \text{ сек}^{-1} \approx 1 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}, \quad (70)$$

или $f_{ц} = \omega_{ц} / 2\pi \approx 10 \text{ Мгц}$. До тех пор, пока скорость частицы остается нерелятивистской, эта частота не зависит от энергии частицы.

При каждом обороте частица получает энергию от переменного электрического поля. По мере увеличения энергии частицы увеличивается и эффективный радиус ее траектории, так как

$$\rho = \frac{v}{\omega_{ц}} = \frac{\sqrt{2E/M_p}}{\omega_{ц}}, \quad (71)$$

где через E обозначена энергия. Предельная энергия протона с

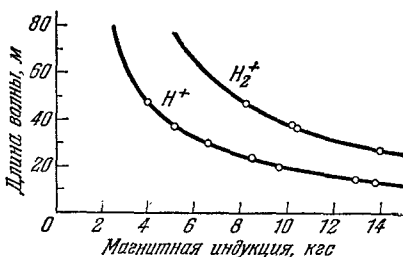


Рис. 4.15. Условия резонанса в первом циклотроне (диаметр 279 мм). По оси ординат отложена величина длины волны в вакууме высокочастотного напряжения, подаваемого на ускоряющие электроды. Кривые построены по теоретическим соотношениям для ионов H^+ и H_2^+ ; кружки соответствуют экспериментальным данным (Лоуренс и Ливингстон, Phys. Rev. 40, 19 (1932)).

нерелятивистской скоростью в постоянном магнитном поле определяется величиной внешнего радиуса циклотрона $r_{ц}$: при $\omega_{ц} = 10^8 \text{ сек}^{-1}$ и $r_{ц} = 50 \text{ см}$ получаем, что $v = \omega_{ц} r_{ц} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ см/сек}$, или

$$E = \frac{1}{2} M_p v^2 \approx (10^{-24}) \cdot (5 \cdot 10^9)^2 \text{ эрг} \approx 25 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}. \quad (72)$$

На практике для обычного циклотрона эту скорость можно считать нерелятивистской.

Задачи

Внимание: всегда указывайте в ответе единицы измерения; ответ без единиц измерения — это вообще не ответ.

1. *Сила, действующая на протон в электрическом поле.* Какова величина силы (в динах), действующей на протон с зарядом e в электрическом поле, напряженность которого $E = 100$ ед. СГСЭ $v/см$?

Ответ. $4,8 \cdot 10^{-8}$ дин.

2. *Сила, действующая на протон в магнитном поле.* Какова величина (в динах) и направление силы, действующей на протон с зарядом e в магнитном поле, индукция которого B равна 100 гс и направлена вдоль оси z , при следующих условиях:

а) Когда протон неподвижен?

Ответ. Нуль.

б) Когда протон движется вдоль оси x со скоростью $v \approx 10^8 \hat{x}$ см/сек?

Ответ. $-1,6 \cdot 10^{-10} \hat{y}$ дин.

3. *Кинетическая энергия электрона.* а) Каковы значения импульса (в г·см/сек) и кинетической энергии (в эргах) электрона со скоростью $v = 10^8 \hat{x}$ см/сек (вспомнить, что кинетическая энергия частицы с массой M равна $\frac{1}{2} M v^2$)?

б) Электрон ускоряется, начиная от состояния покоя, электрическим полем в $0,01$ ед. СГСЭ $_v$ /см. Какова (в эргах) конечная кинетическая энергия этого электрона, когда он пройдет путь 5 см?

О т в е т. $2,4 \cdot 10^{-11}$ эрг.

4. Свободное движение электрона. При $t=0$ скорость электрона $v=10^8 \hat{x}$ см/сек., а его радиус-вектор $r=100\hat{y}$ см; определить его радиус-вектор при $t=0,1$ сек. Внешние силы отсутствуют.

О т в е т. $(10^7 \hat{x} + 10^2 \hat{y})$ см.

5. Ускоренное движение электрона в электрическом поле. Данные — те же, что в задаче 4 при $t=0$, но действует еще электрическое поле $E=10^{-2}$ ед. СГСЭ $_v$ /см; определить радиус-вектор и вектор скорости при $t=1 \cdot 10^{-8}$ сек.

6. Ускоренное движение электрона в магнитном поле. Данные — те же, что в задаче 4 при $t=0$, но в этом случае $B=100\hat{z}$ гс, а $E=0$.

а) Определить радиус-вектор при $t=1 \cdot 10^{-8}$ сек.

б) Найти векторы импульса при $t=0$ и при $t=1 \cdot 10^{-8}$ сек; указать их абсолютную величину и направление.

7. Электрическое поле, уравновешивающее поле земного притяжения. Какова величина напряженности электрического поля, сообщаемого электрону ускорение, равное 980 см/сек., т. е. ускорение силы тяжести?

О т в е т. $1,86 \cdot 10^{-15}$ ед. СГСЭ $_v$ /см.

8. Отношение электростатической и гравитационной сил между двумя электронами. Величина электростатической силы между двумя электронами равна e^2/r^2 ; величина гравитационной силы равна Gm^2/r^2 , где $G=6,67 \cdot 10^{-8}$ дин·см 2 /г 2 . Каков порядок величины отношения электростатической и гравитационной сил между двумя электронами?

О т в е т. 10^{42} .

9. Взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля (см. Дополнение 1). Заряженная частица движется в направлении x в пространстве, где имеется электрическое поле E_y и перпендикулярное к нему магнитное поле B_z . При каком условии результирующая сила, действующая на эту частицу, равняется нулю? Покажите векторы v , E , B на графике. Какова должна быть величина v_x , если $E_y=10$ ед. СГСЭ $_v$ /см, а $B_z=300$ гс?

О т в е т. $v_x=1 \cdot 10^9$ см/сек.

10. Отклонение заряженной частицы между пластинами конденсатора. Частица с

зарядом q и массой M , имеющая начальную скорость $v_0 \hat{x}$, попадает в электрическое поле $-E \hat{y}$. Предположим, что это поле однородно, т. е. что величина напряженности E одинакова во всех точках пространства между пластинами длиной L (за исключением небольших изменений у краев пластин, чем мы пренебрегаем).

а) Какие силы действуют соответственно в направлениях x и y ?

О т в е т. $F_x=0$; $F_y=-qE$.

б) Будет ли сила, действующая в направлении y , влиять на составляющую скорости в направлении x ?

в) Написать решения для v_x и v_y и полное векторное выражение для $v(t)$ в виде функций времени.

О т в е т.

$$v(t) = v_0 \hat{x} - \frac{qE}{M} t \hat{y}.$$

г) Выбрав точку входа частицы в поле конденсатора за начало координат, выразить радиус-вектор частицы как функцию времени, в течение которого она находится между пластинами.

11. Продолжение предыдущей задачи. Найти следующие величины, если частица, о которой говорилось в задаче 10, — это электрон с начальной энергией 10^{-10} эрг, напряженность электрического поля равна $0,01$ ед. СГСЭ $_v$ /см, а $L=2$ см:

а) Вектор скорости в момент, когда электрон выходит из пространства между пластинами.

б) Угол (\mathbf{v}, \hat{x}) в момент выхода частицы из пространства между пластинами.

в) Точку пересечения оси x с направлением движения частицы, выходящей из пространства между пластинами.

12. Электрическое поле точечного заряда. Напряженность E электрического поля на расстоянии r от точечного заряда q имеет в гауссовой системе единиц величину q/r^2 и направлена по радиусу наружу, если q положительно, и внутрь, если q отрицательно.

а) Написать векторное выражение для E .

б) В точку $A(1, 2, 3)^*$ помещен заряд $q=2e$, равный заряду двух протонов. Найти напряженность электрического поля в точке $B(4, 5, 10)$. Единичей длины является сантиметр.

13. Время пробега ионов. Пучок одновалентных ионов цезия Cs^+ ускоряется, начиная от состояния покоя, электрическим полем в 1 ед. СГСЭ \sqrt{cm} , действующим на расстоянии 0,33 см, и после этого проходит 1 мм за $87 \cdot 10^{-9}$ сек в вакууме, где отсутствует электрическое поле.

а) Исходя из этих данных, определить величину массы иона Cs^+ .

О т в е т. $2,4 \cdot 10^{-22}$ г.

Сравните ответ со значением, которое вы найдете в таблице, справочнике или учебнике по химии.

б) Какое потребовалось бы время, чтобы при этих же условиях пробег протона был равен 1 мм?

О т в е т. $7,2 \cdot 10^{-9}$ сек.

в) То же — для дейтрона (дейтрон — это частица, состоящая из протона и нейтрона, $M_d \cong 3,2 \cdot 10^{-24}$ г).

г) Можно ли в этом опыте отличить дейтрон от альфа-частицы? Заряд α -частицы равен $2e$.

14. Заряженные частицы в однородном магнитном поле. Электрон и протон ускоряются электрическим полем напряженностью в 1 ед. СГСЭ \sqrt{cm} , действующим на протяжении 10 см; затем они попадают в однородное магнитное поле с индукцией 10 000 гс, действующее в плоскости, перпендикулярной к электрическому полю.

а) Какова циклотронная частота каждой частицы?

б) Каков радиус круговой орбиты каждой частицы?

О т в е т. $R_e = 1,8 \cdot 10^{-3}$ см; $R_p = 0,77$ см.

15. Магнитные монополи. Магнитные монополи или свободные магнитные полюсы никогда (до настоящего времени) не наблюдались экспериментально. Дирак доказал, что интенсивность свободного магнитного полюса (обозначаемая обычно через g), если таковой существует, должна быть целым кратным произведения величины $\frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar c}{e^2}$ или $\frac{137}{2}$ на элементарный электрический заряд e . Если мы примем это целое число равным единице, то

$$g = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar c}{e^2} \cdot e \cong 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}_q.$$

Мы предполагаем, что если магнитные монополи могут возникать при столкновениях частиц высоких энергий, то будут образовываться равные количества северных и южных монополей.

а) Какова величина силы (в динах) $\mathbf{F} = g\mathbf{B}$, действующей на покоящийся монополь Дирака в магнитном поле $B = 5 \cdot 10^4$ гс?

О т в е т. $1,6 \cdot 10^{-3}$ дин.

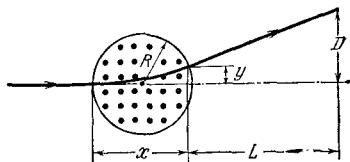


Рис. 4.17.

*) Обозначение $A(1, 2, 3)$ означает точку A с декартовыми координатами соответственно 1, 2 и 3.

б) Сравнить эту силу с электрической силой $F=eE$, действующей на покоящийся протон в электрическом поле $E=5 \cdot 10^4$ в/см. Не забудьте перевести E в единицы системы СГСЭ ($E \cong 5 \cdot 10^4/300$ ед. СГСЭ_{в/см}).

О т в е т. $8,0 \cdot 10^{-8}$ дин.

16. Отклонение пучка электронов магнитным полем. Отклонение пучка электронов в электронно-лучевой трубке может производиться как магнитным, так и электростатическим полем. Пусть пучок электронов, имеющих энергию W , поступает в область, где существует поперечное однородное магнитное поле с индукцией B (краевыми эффектами пренебрегаем).

а) Показать, что (см. рис. 4.17)

$$y=r \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r} \right)^2} \right],$$

причем x — расстояние от точки, где электрон входит в магнитное поле, до точки, где электрон выходит из него, а r — радиус кривизны траектории электрона в поперечном магнитном поле. Радиусом кривизны называется радиус круга, соприкасающегося с искривленной частью траектории (т. е. наиболее близко прилегающего к ней).

б) Если R — радиус поверхности магнитных полюсов, то $x \cong 2R$, когда $r \gg R$. Пользуясь разложением в ряд по формуле бинома Ньютона, доказать, что при этом $y \cong 2R^2/r$.

17. Ускорение заряженных частиц в циклотроне. Предположим, что в циклотроне $\mathbf{V} = \hat{z}B$ и

$$E_x = E \cos \omega_{ц} t, \quad E_y = -E \sin \omega_{ц} t, \quad E_z = 0,$$

причем величина E постоянна (в реальном циклотроне электрическое поле не является пространственно однородным). Очевидно, что при этих условиях вектор напряженности электрического поля описывает круг, вращаясь с угловой скоростью $\omega_{ц}$. Показать, что движение заряженной частицы определяется следующими уравнениями:

$$x(t) = \frac{qE}{M\omega_{ц}^2} (\omega_{ц} t \sin \omega_{ц} t + \cos \omega_{ц} t - 1),$$

$$y(t) = \frac{qE}{M\omega_{ц}^2} (\omega_{ц} t \cos \omega_{ц} t - \sin \omega_{ц} t),$$

если в момент $t=0$ эта частица находилась в начале координат, а ее скорость равнялась нулю. Изобразить первые несколько циклов движения частицы.

Д о п о л н е н и е 1. Движение протона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях

Эту важную задачу можно довольно легко решить. Пусть $\mathbf{V} = B\hat{z}$; если поле \mathbf{E} перпендикулярно к \mathbf{V} , то из уравнения силы Лоренца (10) и определения $\omega_{ц}$, согласно уравнению (51), мы получаем следующие уравнения движения протона:

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M_p} E_x + \omega_{ц} v_y, \quad \dot{v}_y = \frac{e}{M_p} E_y - \omega_{ц} v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad (73)$$

где $\omega_{ц} = eB/M_p c$. Индукция магнитного поля параллельна оси z . Система уравнений (73) допускает следующее частное решение, имеющее наиболее простой вид, если направить ось x параллельно напряженности электрического поля, т. е. так, чтобы $\mathbf{E} = \hat{x}E$:

$$v_y = -\frac{cE}{B}, \quad v_x = 0, \quad v_z = \text{const.} \quad (74)$$