б) Сравнить эту силу с электрической силой $\mathbf{F}=e\mathbf{E}$, действующей на покоящийся протон в электрическом поле $E=5\cdot 10^4$ *в/см*. Не забудьте перевести E в единицы системы СГСЭ ($E\cong 5\cdot 10^4/300$ ед. СГСЭ$_V$/*см*).

Ответ. $8{,}0\cdot 10^{-8}$ *дин*.

16. *Отклонение пучка электронов магнитным полем.* Отклонение пучка электронов в электронно-лучевой трубке может производиться как магнитным, так и электростатическим полем. Пусть пучок электронов, имеющих энергию W, поступает в область, где существует поперечное однородное магнитное поле с индукцией B (краевыми эффектами пренебрегаем).

а) Показать, что (см. рис. 4.17)

$$y=r\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right],$$

причем x — расстояние от точки, где электрон входит в магнитное поле, до точки, где электрон выходит из него, а r — радиус кривизны траектории электрона в поперечном магнитном поле. Радиусом кривизны называется радиус круга, соприкасающегося с искривленной частью траектории (т. е. наиболее близко прилегающего к ней).

б) Если R — радиус поверхности магнитных полюсов, то $x\cong 2R$, когда $r\gg R$. Пользуясь разложением в ряд по формуле бинома Ньютона, доказать, что при этом $y\approx 2R^2/r$.

17. *Ускорение заряженных частиц в циклотроне.* Предположим, что в циклотроне $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}B$ и

$$E_x=E\cos\omega_ц t,\qquad E_y=-E\sin\omega_ц t,\qquad E_z=0,$$

причем величина E постоянна (в реальном циклотроне электрическое поле не является пространственно однородным). Очевидно, что при этих условиях вектор напряженности электрического поля описывает круг, вращаясь с угловой скоростью $\omega_ц$. Показать, что движение заряженной частицы определяется следующими уравнениями:

$$x(t)=\frac{qE}{M\omega_ц^2}(\omega_ц t\sin\omega_ц t+\cos\omega_ц t-1),$$

$$y(t)=\frac{qE}{M\omega_ц^2}(\omega_ц t\cos\omega_ц t-\sin\omega_ц t),$$

если в момент $t=0$ эта частица находилась в начале координат, а ее скорость равнялась нулю. Изобразить первые несколько циклов движения частицы.

Дополнение 1. Движение протона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях

Эту важную задачу можно довольно легко решить. Пусть $\mathbf{B}=B\hat{\mathbf{z}}$; если поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно к $\mathbf{B}$, то из уравнения силы Лоренца (10) и определения $\omega_ц$, согласно уравнению (51), мы получаем следующие уравнения движения протона:

$$\dot{v}_x=\frac{e}{M_p}E_x+\omega_ц v_y,\qquad \dot{v}_y=\frac{e}{M_p}E_y-\omega_ц v_x,\qquad \dot{v}_z=0,\tag{73}$$

где $\omega_ц=eB/M_pc$. Индукция магнитного поля параллельна оси z. Система уравнений (73) допускает следующее ч а с т н о е решение, имеющее наиболее простой вид, если направить ось x параллельно напряженности электрического поля, т. е. так, чтобы $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}E$:

$$v_y=-\frac{cE}{B},\qquad v_x=0,\qquad v_z=\text{const}.\tag{74}$$

Мы можем найти это решение, если зададим себе вопрос, имеется ли такое частное решение системы уравнений (73), для которого $\dot{\mathbf{v}} \equiv 0$, т. е. движение частицы происходит без ускорения. В этом случае сочетание взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей действует как селектор скорости, отбирая

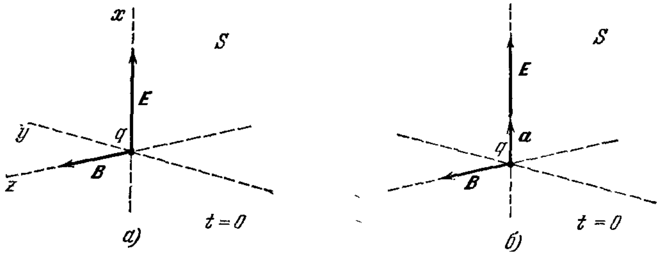

Рис. 4.18. *а*) Представим себе положительный заряд q, находящийся при $t=0$ в начале координат и не имеющий начальной скорости. На этот заряд действуют взаимно перпендикулярные поля: электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{B}$. (Система отсчета S.) *б*) Начальное ускорение этого заряда q равно $\mathbf{a}=q\mathbf{E}/M$.

частицы со скоростью v_y, определяемой из уравнений (74); эти частицы проходят через прибор без отклонений. Рассмотрение частного решения (74) наводит нас на

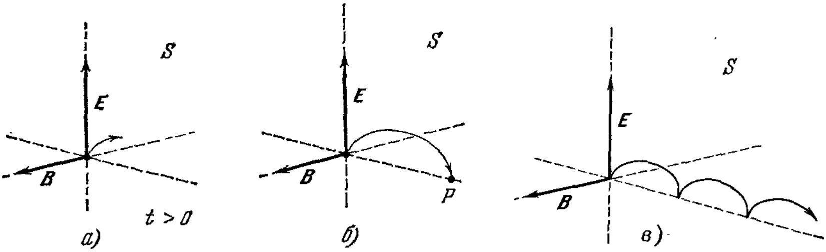

Рис. 4.19. *а*) Как только заряд q приобретет скорость в направлении $\mathbf{E}$, на него станет действовать сила $\mathbf{F}=(q/c)\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Вследствие этого траектория заряда искривляется в направлении $(-y)$. *б*) Заряд q в конце концов попадает в точку P на оси y, где его скорость обращается в нуль. Затем он начинает новый период движения. *в*) Траектория заряда q представляет собой обычную циклоиду (если в начальном положении он был неподвижен), и заряд q движется со средней скоростью V, направленной вправо; $V=cE/B$.

мысль искать общее решение системы дифференциальных уравнений (73) в следующем виде:

$$v_x(t)=\eta_x(t), \qquad v_y(t)=\eta_y(t)-\frac{cE}{B}. \tag{75}$$

Подставляя (75) в (73), получаем

$$\dot{\eta}_x=\omega_ц\eta_y, \qquad \dot{\eta}_y=-\omega_ц\eta_x. \tag{76}$$

Система уравнений (76) равносильна системе (45), решение которой приведено выше. Поэтому

$$v_x(t)=v_1\sin\omega_ц t, \tag{77а}$$

$$v_y(t)=v_1\cos\omega_ц t-\frac{cE}{B}, \tag{77б}$$

$$v_z(t)=\text{const}. \tag{77в}$$

Движение протона, описываемое системой уравнений (77), будет круговым (или движением по спирали, если $v_z\neq 0$) в системе отсчета, движущейся в направлении y со следующей постоянной скоростью:

$$\mathbf{V}=\left(0,\ -\frac{cE}{B},\ 0\right). \qquad (78)$$

В этой движущейся системе отсчета протон ведет себя так, как если бы на него действовало магнитное поле, а электрическое поле равнялось нулю. Сравните (78) с (74).

Пример. *Аналогия с циклоидой.* Движение протона относительно лабораторной системы отсчета подобно движению точки на окружности колеса, катящегося без скольжения в направлении y (т. е. движению по обычной циклоиде), если расстояние

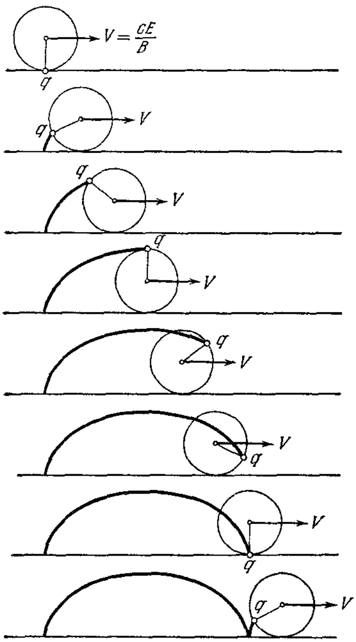

Рис. 4.20. Обычная циклоида описывается материальной точкой q, находящейся на окружности, которая «катится» по прямой.

$$V\frac{2\pi}{\omega_{ц}}=\left(\frac{cE}{B}\right)\left(\frac{2\pi Mc}{qB}\right), \qquad (79)$$

пройденное за период $2\pi/\omega_{ц}$, равно длине окружности $2\pi\rho$. Согласно (57) эта длина окружности равна

$$2\pi\rho=2\pi\frac{cMv_1}{qB}. \qquad (80)$$

Приравнивая правые части уравнений (79) и (80), получаем

$$\frac{2\pi c^2EM}{qB^2}=\frac{2\pi cMv}{qB}, \qquad (81)$$

или

$$\frac{cE}{B}=v_1. \qquad (82)$$

Но $V=cE/B$, так что условие (82) можно переписать как $V=v_1$. Этот результат, полученный для движения заряженной частицы с начальной скоростью, равной нулю, в точности соответствует условию движения точки на окружности при качении без скольжения. Однако только в частном случае, когда $v_1=cE/B$, обе величины $v_x(t)$ и $v_y(t)$ могут быть равны нулю в один и тот же момент времени. Та точка колеса, которая касается плоскости, является при качении без скольжения единственной его точкой, неподвижной в данный момент.

Дополнение 2. **Преобразования систем отсчета**

Когда разбиралась задача о траектории протона *) во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях, мы видели, что описание его движения оказывалось особенно простым, если выбрать систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью

$$\mathbf{V}=\left(0,\ -\frac{cE}{B},\ 0\right) \qquad (83)$$

относительно лабораторной системы отсчета [см. уравнение (78)]. Для наблюдателя, связанного с этой новой системой отсчета, частица движется по спирали, а в

*) Протон был взят как пример частицы только для того, чтобы определенным образом выбрать знак заряда.