направлении y со следующей постоянной скоростью:

$$\mathbf{V}=\left(0, \ -\frac{cE}{B}, \ 0\right). \tag{78}$$

В этой движущейся системе отсчета протон ведет себя так, как если бы на него действовало магнитное поле, а электрическое поле равнялось нулю. Сравните (78) с (74).

Пример. *Аналогия с циклоидой.* Движение протона относительно лабораторной системы отсчета подобно движению точки на окружности колеса, катящегося без скольжения в направлении y (т. е. движению по обычной циклоиде), если расстояние

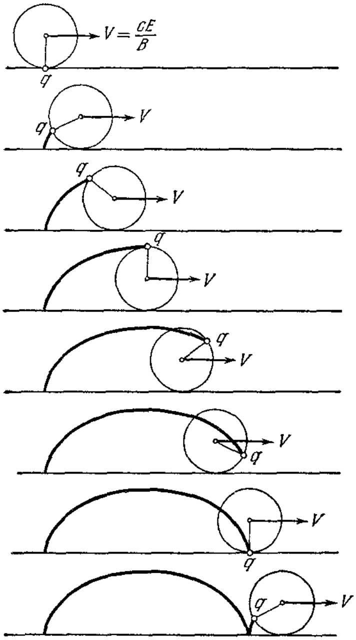

Рис. 4.20. Обычная циклоида описывается материальной точкой q, находящейся на окружности, которая «катится» по прямой.

$$V\frac{2\pi}{\omega_ц}=\left(\frac{cE}{B}\right)\left(\frac{2\pi Mc}{qB}\right), \tag{79}$$

пройденное за период $2\pi/\omega_ц$, равно длине окружности $2\pi\rho$. Согласно (57) эта длина окружности равна

$$2\pi\rho=2\pi\frac{cMv_1}{qB}. \tag{80}$$

Приравнивая правые части уравнений (79) и (80), получаем

$$\frac{2\pi c^2EM}{qB^2}=\frac{2\pi cMv}{qB}, \tag{81}$$

или

$$\frac{cE}{B}=v_1. \tag{82}$$

Но $V=cE/B$, так что условие (82) можно переписать как $V=v_1$. Этот результат, полученный для движения заряженной частицы с начальной скоростью, равной нулю, в точности соответствует условию движения точки на окружности при качении без скольжения. Однако только в частном случае, когда $v_1=cE/B$, обе величины $v_x(t)$ и $v_y(t)$ могут быть равны нулю в один и тот же момент времени. Та точка колеса, которая касается плоскости, является при качении без скольжения единственной его точкой, неподвижной в данный момент.

Дополнение 2. Преобразования систем отсчета

Когда разбиралась задача о траектории протона *) во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях, мы видели, что описание его движения оказывалось особенно простым, если выбрать систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью

$$\mathbf{V}=\left(0, \ -\frac{cE}{B}, \ 0\right) \tag{83}$$

относительно лабораторной системы отсчета [см. уравнение (78)]. Для наблюдателя, связанного с этой новой системой отсчета, частица движется по спирали, а в

*) Протон был взят как пример частицы только для того, чтобы определенным образом выбрать знак заряда.

системе отсчета, имеющей постоянную скорость, равную

$$\mathbf{V}=\left(0,\ -\frac{cE}{B},\ v_z\right), \tag{84}$$

движение наблюдается как круговое движение с постоянной абсолютной величиной скорости. Мы прибавили здесь к (83) скорость вдоль оси z (т. е. вдоль направления вектора $\mathbf{B}$), равную постоянной составляющей скорости частицы в этом направлении. Перейдя к движущейся системе отсчета, мы сильно упростили описание движения частицы. В лабораторной системе отсчета проекция траектории частицы на плоскость xy является циклоидой — обыкновенной, удлиненной или укороченной *), в зависимости от того, будет ли cE/B равно, меньше или больше проекции v_1 скорости частицы на плоскость xy. Такая система отсчета, в которой движение является круговым, очевидно, представляет собой наиболее пригодную систему для анализа этого движения.

Преобразование системы отсчета, относительно которой мы наблюдаем процесс, является одним из наиболее эффективных приемов теоретического анализа,

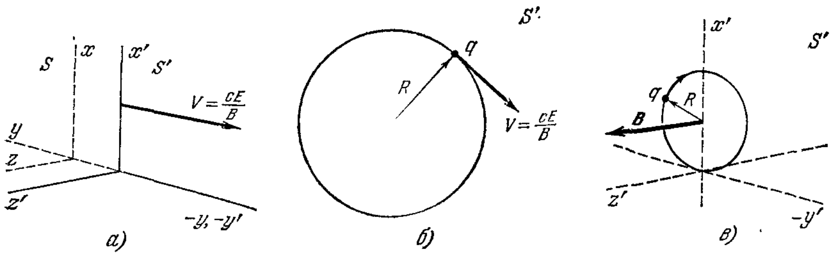

Рис. 4.21. *а*) Будем наблюдать движение заряда q относительно системы отсчета S', полученной из системы S преобразованием Галилея. *б*) Относительно системы отсчета S' заряд q движется со скоростью V по окружности с радиусом $R=\dfrac{MVc}{EB}$. *в*) Таким образом, в системе отсчета S' поле $\mathbf{E}=0$ и на заряженную частицу действует только магнитное поле $\mathbf{B}$.

применяемых в физике. Физическая сущность и принципиальная простота процесса зачастую обнаруживаются только после подходящего преобразования системы отсчета. Обычно преобразование сводится к простому переносу системы отсчета. Студент встретит трудности, только если он забудет, что́ именно надо преобразовать: описание явления **) или систему отсчета, относительно которой мы наблюдаем явление. Почти всегда, приступая к анализу явления, *надо произвести преобразование системы отсчета.* Процесс или явление совершается независимо от системы отсчета: когда меняется система отсчета, меняется только о п и с а н и е этого процесса относительно системы отсчета. В гл. 3 подробно обсуждалось, что́ имеется в виду при преобразовании системы отсчета. Сейчас же мы разберем некоторые технические приемы для подбора простых преобразований.

Рассмотрим конкретный пример того, как можно изменить описание процесса посредством изменения системы отсчета. В общем виде движение заряженной частицы во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях опре-

*) *Обыкновенная циклоида* — это кривая, описываемая точкой на окружности круга, катящегося по прямой линии; *удлиненная циклоида* описывается точкой, находящейся на продолжении радиуса вне окружности, а *укороченная циклоида* описывается точкой, лежащей на радиусе, но внутри окружности.

**) Совсем легко определить, когда нужно преобразовать описание явления (процесса); например, когда мы говорим: «изменим знак всех зарядов, заменив e на $-e$», или «изменим направление всех магнитных полей на обратное, заменив $\mathbf{B}$ на $-\mathbf{B}$», или «изменим направление всех скоростей на обратное, заменив $\mathbf{v}$ на $-\mathbf{v}$».

деляется уравнениями (77):

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega_ц t, \tag{85а}$$

$$v_y(t) = v_1 \cos \omega_ц t - \frac{cE}{B}, \tag{85б}$$

$$v_z(t) = \text{const} \equiv v_z. \tag{85в}$$

Это — движение относительно лабораторной системы отсчета, т. е. относительно системы отсчета, в которой неподвижны магниты и конденсаторы, создающие поля **E** и **B**.

Теперь заменим систему отсчета на другую систему, движущуюся с постоянной скоростью относительно лаборатории и находящихся в ней приборов. Перейдем к системе отсчета, имеющей скорость (84) относительно лаборатории. В обычной векторной системе обозначений уравнение (84) запишется так:

$$\mathbf{V} = -\frac{cE}{B}\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}. \tag{86}$$

Мы предполагаем, что $V/c \ll 1$, т. е. рассматриваемая задача является нерелятивистской.

Прежде всего нам необходимо ввести четкую систему обозначений, чтобы всегда знать, о какой системе отсчета говорится. Если нужно перейти от скорости частицы $\mathbf{v}'$, измеренной в движущейся системе отсчета, к скорости $\mathbf{v}$, измеренной в лабораторной системе отсчета, мы прибавляем $\mathbf{V}$ к $\mathbf{v}'$:

$$\mathbf{v}' + \mathbf{V} = \mathbf{v}. \tag{87}$$

Нетрудно ясно представить себе, с каким знаком входит вектор $\mathbf{V}$ в равенство (87). Предположим, что частица неподвижна относительно движущейся системы отсчета; тогда $\mathbf{v}'=0$. Но при наблюдении в лабораторной системе отсчета частица имеет, согласно уравнению (87), скорость $\mathbf{V}$ движущейся системы отсчета. Этот способ проверки полезен при уточнении знаков в уравнениях преобразования.

Применив к уравнениям (85) преобразование (87), получаем

$$v'_{x'}(t) = v_1 \sin \omega_ц t, \tag{88а}$$

$$v'_{y'}(t) = v_1 \cos \omega_ц t, \tag{88б}$$

$$v'_{z'}(t) = 0. \tag{88в}$$

Следует обратить внимание на то, что в величинах $v'_{x'}$ и т. п. штрихами снабжены как v, так и x. Однако при замене систем отсчета не было поворота, и оси x', y', z' соответственно параллельны осям x, y, z. Уравнения (88) описывают круговое движение с точно такой же угловой частотой $\omega_ц$, как если бы в движущейся системе отсчета на частицу действовало только магнитное поле. В т. II мы будем часто обращаться к свойствам электрического и магнитного полей в движущихся системах отсчета.

Рассмотрим дополнительно также координаты частицы. Проинтегрируем систему уравнений (85), чтобы получить уравнения траектории частицы в лабораторной системе отсчета:

$$x(t) = x_0 - \frac{v_1}{\omega_ц} \cos \omega_ц t, \tag{89а}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_1}{\omega_ц} \sin \omega_ц t - \frac{cE}{B} t, \tag{89б}$$

$$z(t) = z_0 + v_z t. \tag{89в}$$

Для получения уравнений траектории в движущейся системе отсчета интегрируем уравнения (88):

$$x'(t) = x'_0 - \frac{v_1}{\omega_ц} \cos \omega_ц t, \tag{90а}$$

$$y'(t) = y'_0 + \frac{v_1}{\omega_ц} \sin \omega_ц t, \tag{90б}$$

$$z'(t) = z'_0. \tag{90в}$$

В штрихованной системе отсчета траектория частицы представляет собой окружность с радиусом $\rho = v_1/\omega_ц$. Чтобы определить зависимость x_0', y_0', z_0' от x_0, y_0, z_0, нам надо знать расстояние между началами координат O' и O двух систем отсчета при $t = 0$. Если при $t = 0$ начала координат совпадают, то

$$(x_0', y_0', z_0') = (x_0, y_0, z_0).$$

Мы рассмотрели один и тот же процесс в двух системах отсчета. В лабораторной системе отсчета протон, находящийся под действием взаимно перпендикулярных полей **E** и **B**, движется по сложной циклоидальной орбите, определяемой следующим уравнением:

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{91}$$

В системе отсчета, обозначенной одним штрихом, которая движется с данной постоянной скоростью **V** относительно лабораторной системы отсчета, описание движения протона выглядит так, как если бы на него действовало только магнитное поле:

$$M\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{e}{c}\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'. \tag{92}$$

При этом мы предположили, что в нерелятивистской области скоростей $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

Математическое дополнение. **Комплексные числа**

Математическая трактовка колебательных процессов и особенно процессов, происходящих в цепях переменного тока, упрощается, если пользоваться комплексными числами. Комплексное число — это такое число

$$z = a + ib, \tag{93}$$

где a и b — обычные вещественные числа, а i — квадратный корень из минус единицы:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1. \tag{94}$$

Вещественная часть z обозначается как $\mathrm{Re}(z)$ и равна a. Коэффициент при i в

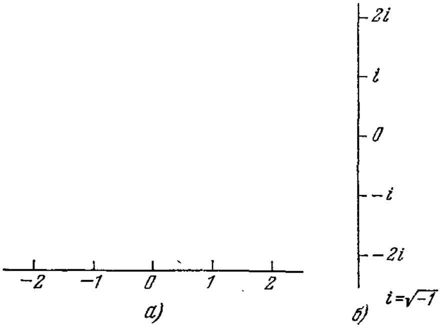

Рис. 4.22. Вещественные числа удобно изображать точками на горизонтальной оси (*а*), а мнимые числа—точками на вертикальной оси (*б*).

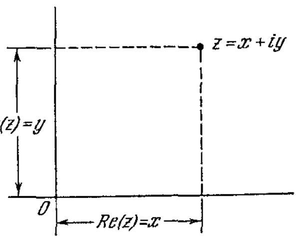

Рис. 4.23. *Комплексное* число $z=x+iy$ изображается точкой на «комплексной» плоскости или плоскости z. Заметим, что точка, изображающая число $+i$, находится от начала координат на расстоянии $+1$ в направлении y.

мнимой части z обозначается как $\mathrm{Im}(z)$ и равен b. Это зависит от соглашения: мы говорим, что $\mathrm{Im}(z) = b$, и не нужно говорить, что $\mathrm{Im}(z) = ib$. Таким образом, $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.