

(112), получаем

$$\psi_1 + \psi_2 = e^{-i\omega t} + e^{-i(\omega + \Delta\omega)t} = [e^{i(\Delta\omega t/2)} + e^{-i(\Delta\omega t/2)}] e^{-i(\omega + \Delta\omega/2)t} = 2 \cos(\Delta\omega t/2) e^{-i(\omega + \Delta\omega/2)t}. \quad (116)$$

Следовательно,

$$\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t = \operatorname{Re}(\psi_1 + \psi_2) = 2 \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t. \quad (117)$$

Если отношение $\Delta\omega/\omega$ мало по сравнению с единицей ($\Delta\omega/\omega \ll 1$), то в результате сложения этих двух колебаний получается модулированное колебание, основная частота которого приблизительно равна ω , а амплитуда относительно медленно изменяется с частотой $\Delta\omega/2$.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_x = \omega_{\text{ц}} v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_{\text{ц}} v_x. \quad (118)$$

Эта система описывает движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z . Помножим второе из уравнений (118) на $-i$ и прибавим к первому. Мы получим

$$\dot{v}_x - i\dot{v}_y = \omega_{\text{ц}}(v_y + iv_x). \quad (119)$$

По определению

$$v^+ \equiv v_x + iv_y, \quad v^- \equiv v_x - iv_y. \quad (120)$$

Тогда уравнение (119) принимает такой вид:

$$\frac{dv^-}{dt} = i\omega_{\text{ц}} v^-, \quad (121)$$

и имеет следующее решение:

$$v^- = A e^{i(\omega_{\text{ц}} t + \varphi)}, \quad (122)$$

где A и φ — постоянные величины. Отделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \operatorname{Re}(v^-) = A \cos(\omega_{\text{ц}} t + \varphi), \\ v_y &= -\operatorname{Im}(v^-) = -A \sin(\omega_{\text{ц}} t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Задачи на комплексные числа.

1. а) Если $z_1 = 5 + 3i$, а $z_2 = 5i$, то чему равно $z_1 + z_2$? б) Чему равно $z_1 z_2$? в) Чему равно $z_1 + z_1^*$? г) Чему равно $z_1 - z_1^*$? д) Чему равно $z_1 z_1^*$?

2. Выразить все ответы к задаче 1 в полярной форме: $z = |z| e^{i\varphi}$.

3. Доказать, что $\sqrt{-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, возведя обе части равенства в квадрат.

4. Чему равен квадратный корень из числа $z = 4 + 9i$?

Из истории физики. Изобретение циклотрона

По своему принципу действия большинство современных ускорителей частиц высоких энергий происходит от первого циклотрона для протонов на 1 Мэв , построенного Лоуренсом и Ливингтоном в Беркли. Идея циклотрона принадлежит Лоуренсу; ее основные положения были впервые опубликованы Лоуренсом и Эдлерсоном в форме беседы, кратко изложенной в журнале «Science» («Наука») 72, 376—377 (1930). Первые экспериментальные результаты были опубликованы в 1932 г. в изящной статье, напечатанной в «Physical Reviews» («Физическое обозрение»),

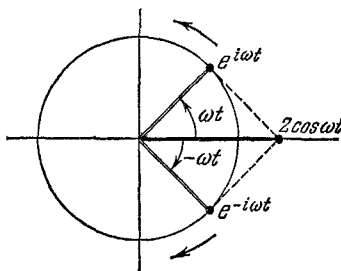


Рис. 4.33. Комплексные числа играют важную роль в теории колебаний: колебание вида $\cos \omega t$ можно выразить как линейную комбинацию двух комплексных переменных, которым соответствуют векторы одинаковой длины, вращающиеся в противоположных направлениях:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

основном физическом журнале Американского физического общества. Для опубликования статей в этом журнале требуется давать к ним содержательные резюме, однако немногие из таких резюме настолько ясно выражают сущность

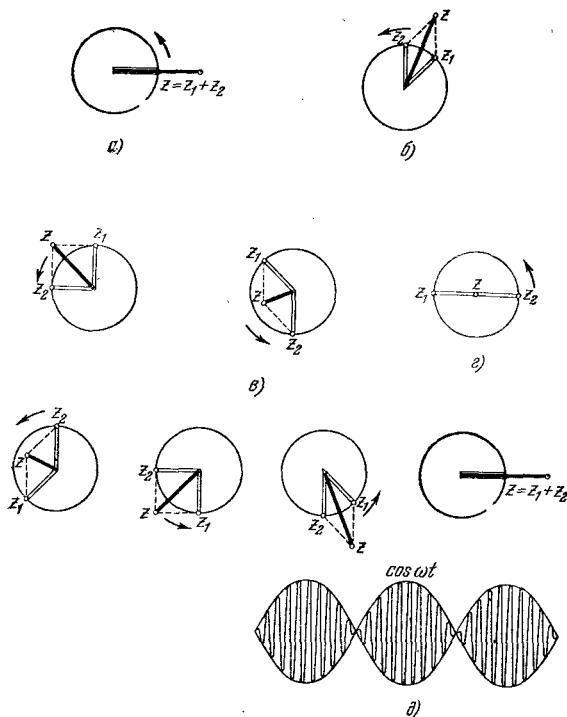


Рис. 4.34. а) В качестве другого примера возьмем два комплексных переменных:

$$z_1 = e^{i(\omega - \Delta\omega/2)t} \quad \text{и} \quad z_2 = e^{i(\omega + \Delta\omega/2)t},$$

которые совпадают по фазе при $t=0$. Однако вектор, соответствующий z_2 , вращается быстрее, чем вектор, соответствующий z_1 . б) По мере возрастания времени все больше увеличивается разность фаз между z_1 и z_2 . Их сумме $z = z_1 + z_2$ соответствует вектор, вращающийся с частотой ω :

$$z = z_0 e^{i\omega t}.$$

а) Амплитуда этого вектора z_0 изменяется со временем. в) Когда $\Delta\omega t = \pi$, получаем $z_0 = 0$. д) Таким образом, так как

$$z = z_1 + z_2 = e^{i(\omega - \Delta\omega/2)t} + e^{i(\omega + \Delta\omega/2)t} = 2 \left(\cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right) e^{i\omega t},$$

получаем

$$z_0 = 2 \cos \frac{\Delta\omega t}{2}.$$

Следовательно, если $\omega \gg \Delta\omega$, то график $\text{Re}(z) = 2 \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$ выглядит так.

$$\text{Огибающая} = 2 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$$

работы, как резюме этой классической статьи Лоуренса и Ливингстона, начало которой приводится здесь вместе с двумя рисунками оригинала. Профессор Ливингстон работает в настоящее время в Массачусетском технологическом институте, профессор Лоуренс умер в 1958 г.

Первоначально использовавшийся магнит диаметром 279 мм почти сразу оказался слишком маленьким для применения в ускорителях; он был реконструи-

рован и до настоящего времени применяется в Беркли для различных исследовательских целей. С этим магнитом, в частности, были проведены первые успешные опыты по циклотронному резонансу носителей заряда в кристаллах.

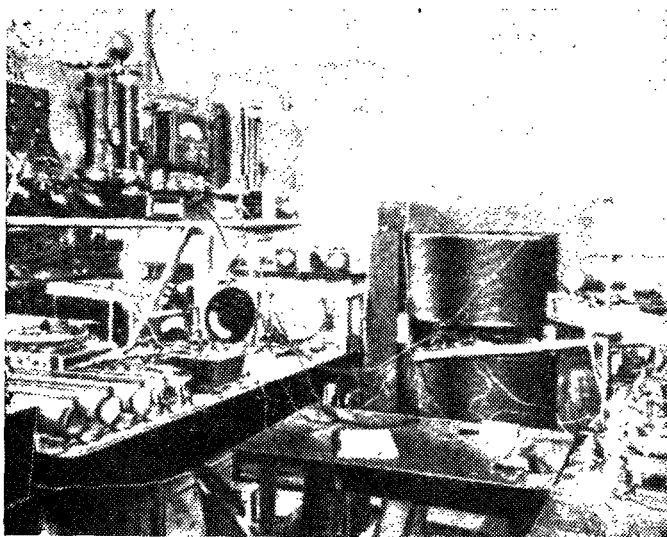


Рис. 4.35. Один из первых циклофонов.

Интересный обзор ранних этапов истории применения циклофонов был сделан Лоуренсом в его речи по случаю получения Нобелевской премии (в сборнике «Les Prix Nobel en 1951», Stockholm, 1952, Imprimerie Royale).

Начало статьи в «Физическом обозрении» (том 40, выпуск от 1 апреля 1932 г.):

ПОЛУЧЕНИЕ ОБЛАДАЮЩИХ ВЫСОКИМИ СКОРОСТЯМИ ЛЕГКИХ ИОНОВ
БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Эрнест О. Лоуренс и М. Стенли Ливингстон,

Калифорнийский университет
(получено 20 февраля 1932 г.)

Резюме

Разработка способов получения высокоскоростных ионов, особенно протонов и ионов гелия, обладающих кинетической энергией больше 1 млн. электрон-вольт, позволила бы сильно облегчить изучение атомных ядер, потому что такие быстро движущиеся частицы наиболее пригодны для возбуждения ядер. Прямой метод ускорения ионов требуемой разностью потенциалов создает большие экспериментальные трудности, связанные с необходимостью получения очень сильных электрических полей. В настоящей статье излагается метод, в котором эти трудности обходятся посредством процесса многократного ускорения ионов до высоких скоростей, не требующего применения высоких напряжений. Этот метод состоит в следующем. Полукруглые полые пластины, похожие на дуанты электрометра, установлены в вакууме в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости этих пластин, таким образом, что их диаметральные края находятся близко друг к другу. К этим пластинам, служащим электродами, подводится колеблющееся напряжение высокой частоты, создающее колеблющееся электрическое поле

в зазоре между их диаметрными краями. В результате этого в течение одной половины периода электрического поле ускоряет ионы, образовавшиеся в диаметрально зазоре и направляющиеся во внутреннюю полость одного из электродов, где под действием магнитного поля они движутся по круговым траекториям и в конце концов опять попадают в зазор между электродами. Магнитное поле задается таким образом, чтобы время, необходимое для прохождения полуокружности по траектории внутри электродов, равнялось полупериоду колебаний. Вследствие этого, когда ионы возвращаются в зазор между электродами, электрическое поле изменит свое направление, и, таким образом, ионы, входя внутрь другого электрода, приобретут еще одно приращение скорости. Поскольку радиусы траекторий внутри электродов пропорциональны скоростям ионов, время, необходимое для прохождения таким ионом полуокружности, не зависит от его скорости. Поэтому, если ионы затрачивают точно половину периода на первую половину своего оборота, то они будут двигаться и дальше в таком же режиме и, таким образом, будут описывать спираль с периодом обращения, равным периоду колебаний электрического поля, до тех пор, пока они не достигнут наружного края прибора. Их кинетические энергии по окончании процесса ускорения будут больше энергии, соответствующей напряжению, приложенному к электродам, во столько раз, сколько они совершили переходов от одного электрода к другому. Этот метод предназначен главным образом для ускорения легких ионов, и в проведенных опытах особое внимание уделялось получению протонов, обладающих высокими скоростями, потому что предполагалось, что только протоны пригодны для экспериментальных исследований атомных ядер. При применении магнита с площадками полюсов, имеющих диаметр 11 дюймов*), был получен в вакуумной трубке ток силой 10^{-9} а из протонов, обладавших энергией $1,22 \cdot 10^6$ эв, причем максимальное приложенное напряжение равнялось только 4000 в. Разработанный экспериментальный метод обладает двумя особенностями, которые в значительной степени обеспечили успех его применения. Во-первых, существует фокусирующее действие электрического и магнитного полей, предохраняющее от потери значительного числа ионов в процессе их ускорения. Вследствие этого сила тока высокоскоростных ионов, получаемого этим косвенным способом, сравнима с силами токов, обычно получаемых методами прямого ускорения с применением высокого напряжения. Более того, фокусирующее действие приводит к образованию очень узких ионных пучков (с диаметром поперечного сечения менее 1 мм), являющихся идеальными для экспериментального изучения процессов межатомных столкновений. Гораздо меньшее значение имеет вторая особенность метода, заключающаяся в применении простого и весьма эффективного способа коррекции магнитного поля вдоль траектории ионов. Это дает возможность легко добиться эффективной работы прибора с очень высоким коэффициентом усиления (т. е. отношением конечного эквивалентного напряжения ускоренных ионов к приложенному напряжению). Вследствие изложенного описываемый метод уже на его нынешней стадии развития представляет собой высоконадежный и экспериментально удобный способ получения высокоскоростных ионов, требующий относительно скромного лабораторного оснащения. Более того, проведенные опыты показывают, что этот косвенный метод многократного ускорения уже сейчас создает реальную возможность для получения в лабораторных условиях протонов с кинетическими энергиями свыше 10^7 эв. С этой целью в нашей лаборатории монтируется магнит с площадками полюсов диаметром 114 см.

В в е д е н и е

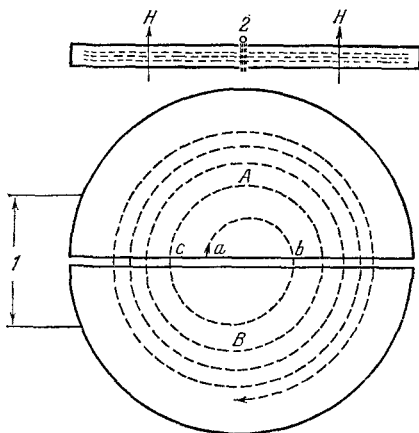
Классические опыты Резерфорда с сотрудниками¹⁾ и Позе²⁾ по искусственной радиоактивности, а также опыты Боте и Беккера³⁾ по возбуждению ядерного излучения подтверждают точку зрения о том, что атомное ядро поддается тем же общим методам исследования, которые так успешно применялись для определения

*) 279 мм. (Прим. ред.)

1) См. гл. 10 монографии Резерфорда, Чедвика и Эллиса «Излучение радиоактивных веществ».

2) Н. P o s e, Zeitschr. für Physik 64, 1 (1930).

3) W. B o t h e, H. B e c k e r, Zeitschr. für Physik 66, 1289 (1930).



Схема, показывающая принцип экспериментального метода многократного ускорения ионов. 1—к генератору колебаний высокой частоты; 2—раскаленная нить

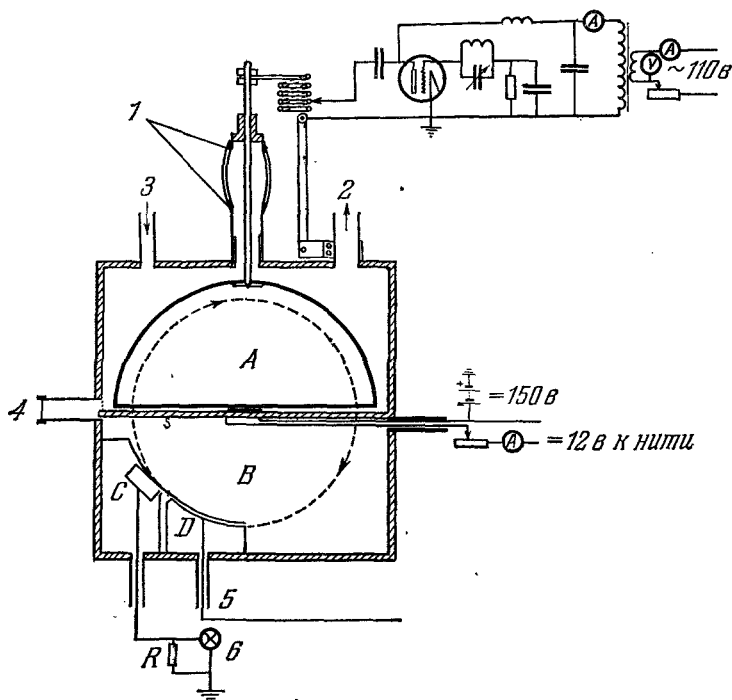


Схема установки для многократного ускорения ионов. 1—соединения медь—стекло
2—вакуумный насос; 3—водород; 4—окошко; 5—отклоняющий потенциал; 6—электро-
метр.

внеядерных свойств атома. Результаты этих работ показывают, что особенно полезны исследования ядерных переходов, искусственно возбужденных в лаборатории. Таким образом, широкая разработка методов возбуждения атомных ядер представляет собой очень интересную задачу; ее решение, вероятно, явится ключом к новому миру явлений, миру атомного ядра.

Но все это настолько же трудно, насколько интересно, так как атомное ядро сопротивляется таким экспериментальным атакам, противопоставляя им крепкую стену высоких энергий связи. Уровни внутриядерной энергии широко разделены друг от друга, и, как следствие этого, процессы ядерного возбуждения связаны с огромными количествами энергий — миллионами электрон-вольт.

Поэтому представляет интерес исследование наиболее многообещающих способов возбуждения атомных ядер. Имеются два основных метода: возбуждение в результате поглощения излучения (гамма-излучения) и возбуждение с помощью непосредственных столкновений частиц высоких энергий с атомными ядрами.

По поводу первого метода можно сказать, что недавние экспериментальные исследования^{1), 2)} поглощения гамма-излучения веществом показывают для более тяжелых элементов изменения в зависимости от атомного номера, и эти факты свидетельствуют о наличии довольно значительного взаимодействия с ядрами. Все это наводит на мысль, что возбуждение ядер посредством поглощения излучения, может быть, не является редким процессом и что поэтому разработка способа получения мощных искусственных источников гамма-излучения с различными длинами волн могла бы иметь значительную ценность для ядерных исследований. В нашей лаборатории, как и в других местах, ставятся такие работы.

Однако в результате работ Резерфорда и других авторов, цитировавшихся выше, метод соударений представляется даже более перспективным. Основоплагающие исследования этих авторов должны всегда рассматриваться как действительно крупные экспериментальные достижения, потому что в них были получены определенные и важные данные о весьма редких ядерных процессах, возбужденных исключительно слабыми пучками бомбардирующих частиц — альфа-частиц от радиоактивных источников. Более того, и это как раз следует здесь подчеркнуть, их работа поразительно ясно показала...*)

¹⁾ G. В e c k, Naturwiss. 18, 896 (1930).

²⁾ C. Y. C h a o, Phys. Rev. 36, 1519 (1930).

*) На этом заканчивается отрывок из статьи Э. О. Лоуренса и М. С. Ливингстона. (Прим. ред.)