В штрихованной системе отсчета траектория частицы представляет собой окружность с радиусом $\rho = v_1/\omega_ц$. Чтобы определить зависимость x_0', y_0', z_0' от x_0, y_0, z_0, нам надо знать расстояние между началами координат O' и O двух систем отсчета при $t = 0$. Если при $t = 0$ начала координат совпадают, то

$$(x_0', y_0', z_0') = (x_0, y_0, z_0).$$

Мы рассмотрели один и тот же процесс в двух системах отсчета. В лабораторной системе отсчета протон, находящийся под действием взаимно перпендикулярных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, движется по сложной циклоидальной орбите, определяемой следующим уравнением:

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \quad (91)$$

В системе отсчета, обозначенной одним штрихом, которая движется с данной постоянной скоростью $\mathbf{V}$ относительно лабораторной системы отсчета, описание движения протона выглядит так, как если бы на него действовало только магнитное поле:

$$M\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{e}{c}\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'. \quad (92)$$

При этом мы предположили, что в нерелятивистской области скоростей $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

М а т е м а т и ч е с к о е   д о п о л н е н и е. **Комплексные числа**

Математическая трактовка колебательных процессов и особенно процессов, происходящих в цепях переменного тока, упрощается, если пользоваться комплексными числами. Комплексное число — это такое число

$$z = a + ib, \quad (93)$$

где a и b — обычные вещественные числа, а i — квадратный корень из минус единицы:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1. \quad (94)$$

Вещественная часть z обозначается как $\mathrm{Re}(z)$ и равна a. Коэффициент при i в

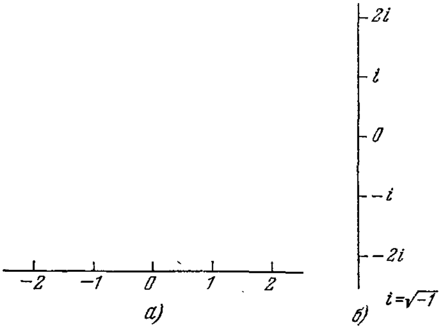

Рис. 4.22. Вещественные числа удобно изображать точками на горизонтальной оси (*а*), а мнимые числа—точками на вертикальной оси (*б*).

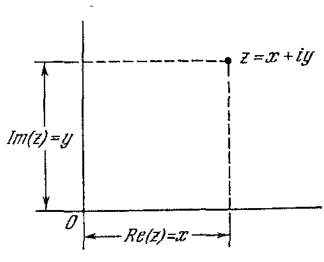

Рис. 4.23. *Комплексное* число $z=x+iy$ изображается точкой на «комплексной» плоскости или плоскости z. Заметим, что точка, изображающая число $+i$, находится от начала координат на расстоянии $+1$ в направлении y.

мнимой части z обозначается как $\mathrm{Im}(z)$ и равен b. Это зависит от соглашения: мы говорим, что $\mathrm{Im}(z) = b$, и не нужно говорить, что $\mathrm{Im}(z) = ib$. Таким образом, $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

Сложить два комплексных числа — это значит образовать число

$$z_1+z_2=(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2). \tag{95}$$

Перемножить два комплексных числа — это значит образовать число

$$z_1z_2=(a_1+ib_1)\,(a_2+ib_2)=a_1a_2+ia_1b_2+ia_2b_1+i^2b_1b_2. \tag{96}$$

Подставив $i^2=-1$, получаем

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i\,(a_1b_2+a_2b_1). \tag{97}$$

При *делении* комплексных чисел мы обычно стремимся так преобразовать частное, чтобы его знаменатель был вещественным:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)\,(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\,(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i\,(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}. \tag{98}$$

При изменении знака перед i в любом комплексном числе z получается число z^*, *комплексно сопряженное* с данным. Если $z=a+ib$, то

$$z^*=a-ib. \tag{99}$$

Произведение комплексного числа на число, сопряженное с ним, является положительным вещественным числом

$$zz^*=a^2+b^2. \tag{100}$$

По определению модуль числа z равен

$$|z|=\sqrt{zz^*}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Эти определения становятся более наглядными, если мы представим комплексное число $z=x+iy$ геометрически. Пусть ось x будет вещественной осью, а ось y — мнимой осью. Тогда $|z|$ будет равен расстоянию от начала координат O до точки

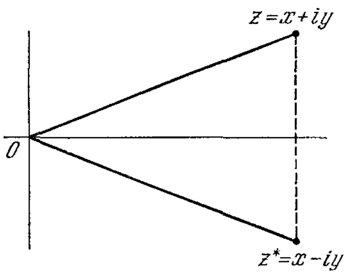

Рис. 4.24. Комплексно сопряженным числу $z=x+iy$ является число $z^*=x-iy$. Очевидно, что $|z|=|z^*|$.

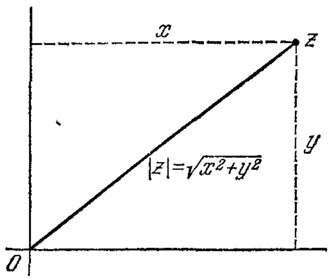

Рис. 4.25. Абсолютная величина $|z|$ комплексного числа соответствует расстоянию от начала координат до точки z. Согласно теореме Пифагора $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

z, а Re (z) и Im (z) — это проекции отрезка Oz на обе оси (см. рис. 4.23). При графическом представлении видно, что сложение комплексных чисел совершается по правилу параллелограмма; этот вывод подтверждается аналитически. Комплексные числа обладают некоторыми свойствами векторов в двумерном пространстве.

Обозначим через φ угол между отрезком Oz и вещественной осью (рис. 4.27). Тогда мы можем представить любое комплексное число $z=x+iy$ в таком виде:

$$z=|z|\,(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{101}$$

где

$$x=|z|\cos\varphi \quad \text{и} \quad y=|z|\sin\varphi. \tag{102}$$

Введем следующее важное соотношение, связывающее показательную функцию,

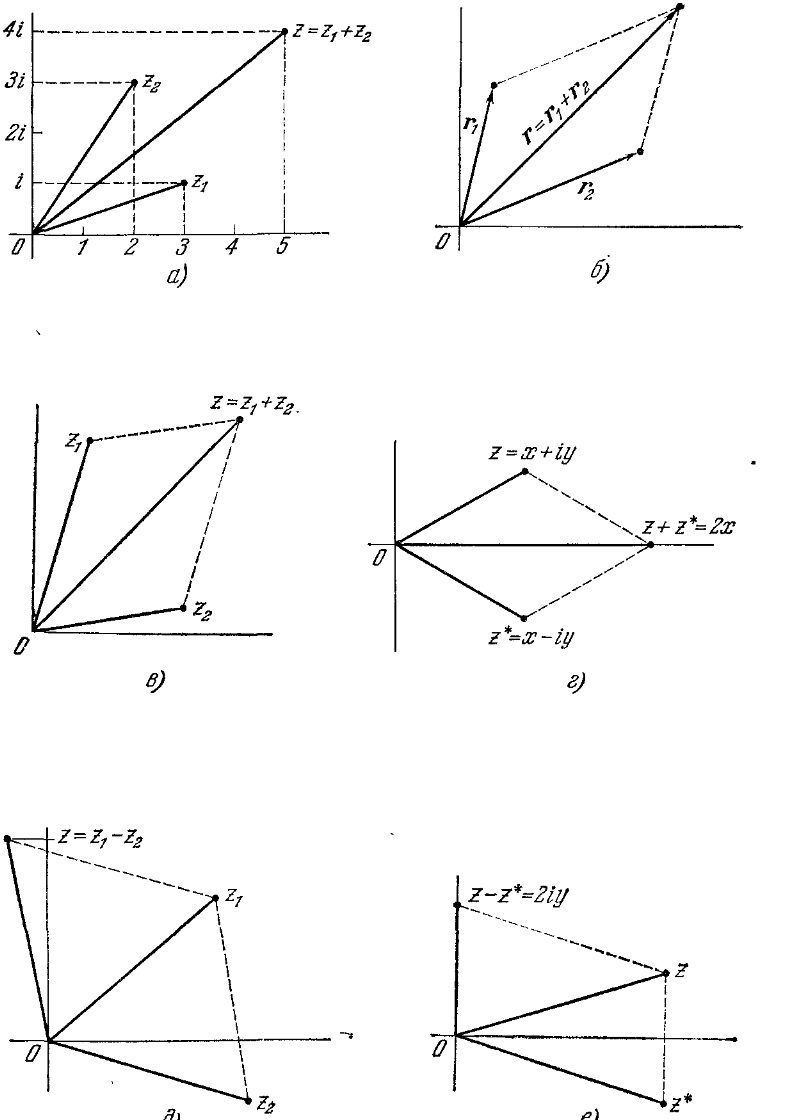

Рис. 4.26. *Сложение комплексных чисел:*
если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x + iy_2$,
то $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$.

Убедитесь, что это подтверждается графиком (*а*).

Сложение векторов. Векторы тоже складываются по правилу «составляющая с составляющей» (*б*). Следовательно, если правило параллелограмма выполняется для сложения векторов, то оно выполняется также и для сложения комплексных чисел (*в*). Например, $z + z^* = 2x$, т. е. равно вещественному числу (*г*). Подобным же образом вычитание комплексных чисел легко выполняется с помощью правила параллелограмма (*д*). Например, $z - z^* = 2iy$, т. е. равно мнимому числу (*е*).

косинус и синус и доказываемое разложением этих трех функций в степенные ряды:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \qquad (103)$$

Тогда можно переписать уравнение (101) таким образом:

$$z=|z|e^{i\varphi}. \qquad (104)$$

Мы называем φ *аргументом* z, а $|z|$ — *модулем* z. Эта форма записи особенно удобна для выражения амплитуды и фазы колебаний. Умножение и деление комплексных чисел выглядит теперь гораздо проще:

$$z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (105)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (106)$$

Формулы (105) и (106) очень удобны для числовых расчетов. Из графического представления комплексного числа в виде вектора видно, что умножение на другое комплексное число равносильно растяжению вектора с поворотом его. Результат умножения не зависит от порядка этих операций.

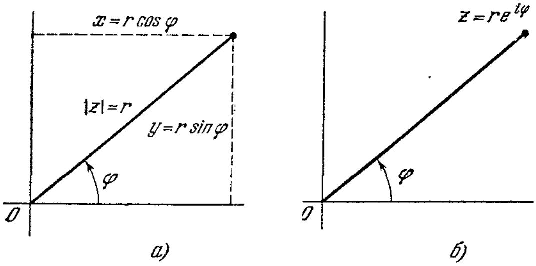

Рис. 4.27. Полярная форма записи комплексных чисел. Из графика (*а*) ясно, что $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Поскольку $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$, то мы можем записать любое комплексное число в *полярной форме* (*б*): $z=re^{i\varphi}$.

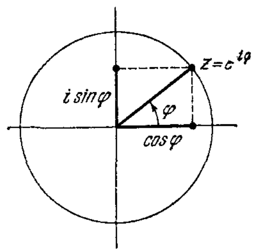

Рис. 4.28. В частности, если $|z|=r=1$, то число z изображается точкой на окружности единичного радиуса. Полярная форма записи очень удобна.

Точки комплексной плоскости $z=x+iy$, изображающие комплексные числа с модулем, равным единице ($|z|=1$), находятся на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Такие комплексные числа могут быть выражены формулой (103). Пользуясь формулами (103) и (105), мы можем вывести уравнение Муавра:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi, \qquad (107)$$

которое дает нам непосредственно уравнения для синуса и косинуса кратных углов, если отдельно приравнять друг другу вещественные и мнимые части из выражений слева и справа.

Пример. Выведем уравнения для $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$. Из уравнения Муавра получаем при $n=2$

$$(e^{i\varphi})^2=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=e^{2i\varphi}=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi, \qquad (108)$$

или

$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi. \qquad (109)$$

Приравнивая вещественные и мнимые части выражений, соединенных в (109) знаком равенства, получаем следующие результаты:

$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi, \qquad (110)$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi. \qquad (111)$$

С помощью уравнения Муавра можно получить естественным и легким путем значительную часть тригонометрических тождеств.

В качестве упражнения используйте уравнение (103) для вывода следующих важных тождеств:

$$\cos\varphi \equiv \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi \equiv \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{112}$$

При равенстве двух комплексных чисел должны быть в отдельности равны друг другу их вещественные и мнимые части. Пользуясь этим свойством, мы можем выразить функцию колебаний $\psi = \cos\omega t$ как вещественную часть комплексной функции $\psi = e^{-i\omega t}$, *а по окончании преобразований опять отделить вещественную*

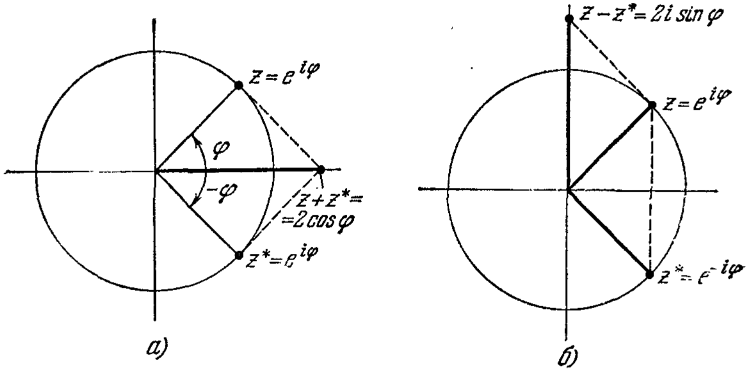

Рис. 4.29. *а*) Как мы видели выше, $z+z^*=2x$. Следовательно, $e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi$, или

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}.$$

б) Подобным же образом $z-z^*=2iy$, так что

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

часть. Мы можем свободно делать это, если в преобразования не входят произведения комплексных чисел, т. е. если уравнения в комплексных числах линейны. Но с произведениями необходимо оперировать очень осторожно. Предположим, что нас интересует произведение x_1x_2 двух вещественных величин. Если мы напишем

$$z_1=x_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2, \tag{113}$$

то вещественная часть произведения этих комплексных чисел будет

$$\mathrm{Re}\,(z_1z_2)=x_1x_2-y_1y_2, \tag{114}$$

т. е. она н е р а в н а произведению вещественных частей сомножителей:

$$\mathrm{Re}\,(z_1)\,\mathrm{Re}\,(z_2)=x_1x_2. \tag{115}$$

Хотя система записи в виде комплексных величин очень удобна при решении линейных дифференциальных уравнений и при анализе процессов в линейных цепях, применяя ее, следует соблюдать осторожность, если рассчитываются билинейные количества, как, например, поглощение энергии и поток энергии. По указанной причине в руководстве по лабораторным работам к этому курсу относительно редко употребляются комплексные числа. Однако без комплексных величин квантовая физика выглядела бы довольно громоздко.

П р и м е р. Найти результат сложения двух колебаний, описываемых уравнениями $\psi_1 = \cos\omega t$ и $\psi_2 = \cos(\omega + \Delta\omega)t$. В комплексной форме, применяя тождество

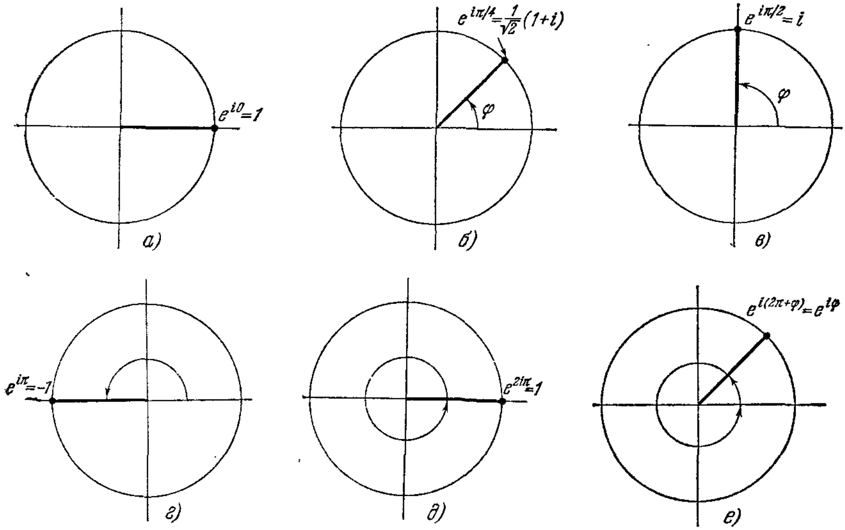

Рис. 4.30. Рассмотрим комплексные числа, изображаемые точками на окружности единичного радиуса. *а*) $\varphi=0$; *б*) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; *в*) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; *г*) $\varphi=\pi$. *д*) Теперь $\varphi=2\pi$. Мы вернулись к исходной точке. *е*) Для значений $\varphi>2\pi$ мы получаем

$$e^{i(\varphi+2\pi)}=e^{i\varphi}.$$

Таким образом, $e^{i\varphi}$ является *периодической функцией с периодом* 2π.

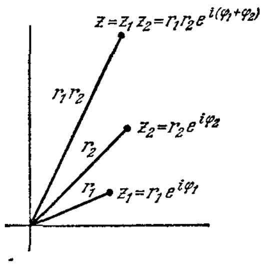

Рис. 4.31. Если

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1}$$

и

$$z_2=r_2e^{i\varphi_2},$$

то $z=z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

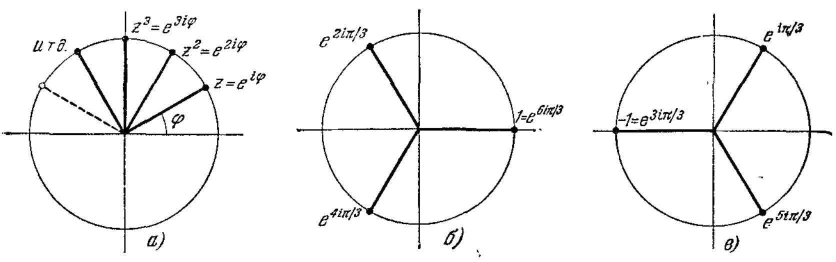

Рис. 4.32. *а*) Здесь в качестве примера показаны последовательные степени числа $z=e^{i\varphi}$ (окружность единичного радиуса). *б*) Другой пример: три корня двучлена $f(z)=z^3-1$ и *в*) три корня двучлена $f(z)=z^3+1$. Проверьте эти два примера.

(112), получаем

$$\psi_1+\psi_2=e^{-i\omega t}+e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}=\left[e^{i(\Delta\omega t/2)}+e^{-i(\Delta\omega t/2)}\right]e^{-i(\omega+\Delta\omega/2)t}=$$
$$=2\cos(\Delta\omega t/2)\,e^{-i(\omega+\Delta\omega/2)t}. \qquad (116)$$

Следовательно,

$$\cos\omega t+\cos(\omega+\Delta\omega)t=\mathrm{Re}(\psi_1+\psi_2)=2\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\cos\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t. \qquad (117)$$

Если отношение $\Delta\omega/\omega$ мало по сравнению с единицей ($\Delta\omega/\omega \ll 1$), то в результате сложения этих двух колебаний получается модулированное колебание, основная частота которого приближенно равна ω, а амплитуда относительно медленно изменяется с частотой $\Delta\omega/2$.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot v_x=\omega_ц v_y, \quad \dot v_y=-\omega_ц v_x. \qquad (118)$$

Эта система описывает движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z. Помножим второе из уравнений (118) на $-i$ и прибавим к первому. Мы получим

$$\dot v_x-i\dot v_y=\omega_ц(v_y+iv_x). \qquad (119)$$

По определению

$$v^+\equiv v_x+iv_y, \quad v^-\equiv v_x-iv_y. \qquad (120)$$

Тогда уравнение (119) принимает такой вид:

$$\frac{dv^-}{dt}=i\omega_ц v^-, \qquad (121)$$

и имеет следующее решение:

$$v^-=Ae^{i(\omega_ц t+\varphi)}, \qquad (122)$$

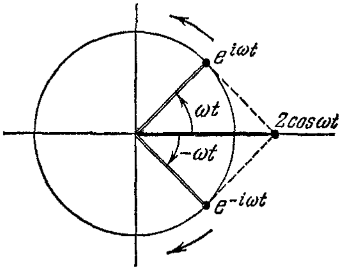

Рис. 4.33. Комплексные числа играют важную роль в теории колебаний: колебание вида $\cos\omega t$ можно выразить как линейную комбинацию двух комплексных переменных, которым соответствуют векторы одинаковой длины, вращающиеся в противоположных направлениях:

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}.$$

где A и φ — постоянные величины. Отделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\mathrm{Re}(v^-)=A\cos(\omega_ц t+\varphi),\\ v_y&=-\mathrm{Im}(v^-)=-A\sin(\omega_ц t+\varphi).\end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

Задачи на комплексные числа.

1. а) Если $z_1=5+3i$, а $z_2=5i$, то чему равно z_1+z_2? б) Чему равно z_1z_2? в) Чему равно $z_1+z_1^*$? г) Чему равно $z_1-z_1^*$? д) Чему равно $z_1z_1^*$?

2. Выразить все ответы к задаче 1 в полярной форме: $z=|z|e^{i\varphi}$.

3. Доказать, что $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, возведя обе части равенства в квадрат.

4. Чему равен квадратный корень из числа $z=4+9i$?

Из истории физики. Изобретение циклотрона

По своему принципу действия большинство современных ускорителей частиц высоких энергий происходит от первого циклотрона для протонов на 1 *Мэв*, построенного Лоуренсом и Ливингстоном в Беркли. Идея циклотрона принадлежит Лоуренсу; ее основные положения были впервые опубликованы Лоуренсом и Эдлефсеном в форме беседы, кратко изложенной в журнале «Science» («Наука») 72, 376—377 (1930). Первые экспериментальные результаты были опубликованы в 1932 г. в изящной статье, напечатанной в «Physical Reviews» («Физическое обозрение»),