и электрических компонентов, или на проектирование спутника, приводимого в движение одними лишь внутренними силами.

2. Законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы неизвестны; так, в частности, обстоит делс в физике элементарных частиц.

3. Законы сохранения тесно связаны с инвариантностью. Часто при исследовании новых и еще не понятных явлений законы сохранения являются самым поразительным из всех известных нам физических фактов. Они могут приводить к соответствующим представлениям об инвариантности. В гл. 3 мы видели, что закон сохранения импульса мог рассматриваться как непосредственное следствие из принципа инвариантности Галилея.

4. Даже в тех случаях, когда сила в точности известна, закон сохранения может оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц. Для решения новых задач большинство физиков следует раз навсегда установленному порядку: прежде всего один за другим применяются соответствующие законы сохранения, и только после этого, если в задаче ничего не упущено, переходят к решению дифференциальных уравнений, использованию вариационного принципа или метода возмущений, применению вычислительных машин и других средств, имеющихся в нашем распоряжении или полагаются на интуицию. В гл. 7 и 9 мы используем таким путем законы сохранения энергии и импульса.

5.2. Определение понятий

Закон сохранения энергии включает в себя понятия кинетической и потенциальной энергии, а также понятие работы. Эти понятия, которые можно усвоить на простом примере, в дальнейшем мы обсудим более подробно. Сначала мы рассмотрим силы и движение только в одном измерении. Это существенно упростит дело. Некоторые вопросы в этой главе будут обсуждаться дважды, но такое повторение окажется только полезным.

Рассмотрим частицу массой M, движущуюся в межгалактическом пространстве и свободную от всех внешних воздействий. Эту частицу мы будем наблюдать в инерциальной системе координат. Пусть в момент времени $t=0$ к частице приложена сила $\mathbf{F}_{\text{прил}}$, постоянная по величине и направлению, совпадающему с положительным направлением оси x. Под действием приложенной силы частица будет ускоряться. При $t>0$ движение описывается вторым законом Ньютона:

$$F_{\text{прил}} = M\ddot{x}. \tag{1}$$

Скорость в момент t будет равна

$$v(t) = \int_0^t \ddot{x}\,dt = v_0 + \frac{F_{\text{прил}}}{M}t, \tag{2}$$

где v_0 — начальная скорость, направленная по оси x. Заметим, что (2) можно записать в виде

$$F_{\text{прил}} t = Mv(t) - Mv_0. \tag{2a}$$

Правая часть этого равенства представляет собой изменение импульса частицы за промежуток времени от 0 до t; левая часть называется импульсом силы за тот же промежуток времени. Уравнение (2а) говорит нам о том, что изменение импульса равно импульсу силы. Если начальное положение частицы характеризуется координатой x_0, то ее положение в момент времени t будет определяться так:

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F_{\text{прил}}}{M}t^2, \tag{3}$$

что получается в результате интегрирования уравнения (2). Решая (2) относительно t, находим

$$t = \frac{M}{F_{\text{прил}}}(v - v_0). \tag{4}$$

Подставляя теперь (4) в (3), получаем

$$x - x_0 = \frac{M}{F_{\text{прил}}}(vv_0 - v_0^2) + \frac{1}{2}\frac{M}{F_{\text{прил}}}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) = \\ = \frac{1}{2}\frac{M}{F_{\text{прил}}}(v^2 - v_0^2), \tag{5}$$

откуда

$$\boxed{\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = F_{\text{прил}}\cdot(x - x_0).} \tag{6}$$

Если величину $^1/_2 Mv^2$ мы назовем *кинетической энергией* частицы, то левая часть (6) будет представлять собой изменение кинетической энергии. Это изменение вызывается силой $F_{\text{прил}}$ на пути $(x - x_0)$. Очевидно, мы можем теперь дать определение работе, назвав произведение $F_{\text{прил}}\cdot(x - x_0)$ *работой, совершаемой силой, приложенной к частице*. Из этих *определений* и из уравнения (6) следует, что работа, совершаемая приложенной силой, равна изменению кинетической энергии частицы. Все это относится к области определений. Однако подобные определения полезны, и они согласуются со вторым законом Ньютона. Говоря о работе, всегда следует помнить, что *работа совершается некоторой силой*.

Если $M = 20$ *г* и $v = 100$ *см/сек*, то кинетическая энергия

$$K = {}^1/_2 Mv^2 = {}^1/_2 \cdot 20\ г \cdot 10^4\ см^2/сек^2 = 1\cdot 10^5\ г\cdot см^2/сек^2 = 1\cdot 10^5\ эрг. \tag{7}$$

Эрг представляет собой единицу энергии в системе единиц СГС. Если сила в 100 *дин* действует на пути в 10^3 *см*, то

$$F_{\text{прил}}\cdot(x - x_0) = 10^2\ дин\cdot 10^3\ см = 10^5\ дин\cdot см = 10^5\ эрг. \tag{8}$$

Один эрг равен работе, совершаемой силой в одну дину, действующей на пути в один сантиметр. Работа имеет размерность

$$[\text{работа}] \sim [\text{сила}] \cdot [\text{расстояние}] \sim [\text{масса}] \cdot [\text{ускорение}] \cdot [\text{расстояние}] \sim$$
$$\sim \left[M \frac{L}{T^2} L\right] \sim [ML^2T^{-2}] \sim [\text{энергия}].$$

В системе МКС единицей работы является *джоуль*, равный работе, совершаемой силой в один ньютон, действующей на пути в один метр. Для того чтобы перевести джоули в эрги, нужно величину работы, выраженной в джоулях, умножить на 10^7. Для того чтобы перевести ньютоны в дины, нужно величину силы, выраженной в ньютонах, умножить на 10^5.

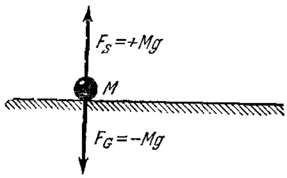

Рис. 5.1. К массе M, находящейся в состоянии покоя на поверхности земли, приложены две равные по величине и противоположно направленные силы: F_G — сила тяжести, притягивающая тело к земле, и F_S — сила, оказывающая давление на тело со стороны поверхности земли.

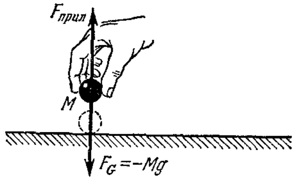

Рис. 5.2. Для того чтобы поднять массу M с постоянной скоростью, нужно приложить силу $F_{\text{прил}} = +Mg$.

Предположим теперь, что частица или какое-нибудь тело находится не в межгалактическом пространстве, а на высоте h от поверхности земли ($x_0=h$, $v_0=0$). Тогда на это тело действует по направлению к земле сила тяжести $F_G=-Mg$. Под действием этой силы тело падает по направлению к поверхности земли. Работа, *совершаемая силой тяжести*, равна приращению кинетической энергии тела:

$$W = F_G \cdot (x - x_0), \tag{9}$$

или на поверхности земли ($x=0$):

$$W = (-Mg)(0-h) = Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv^2, \tag{10}$$

где v — скорость, приобретаемая телом, достигающим поверхности земли, и v_0 — начальная скорость (в этом частном случае $v_0=0$). На основании уравнения (10) мы можем сказать, что на высоте h тело обладает *потенциальной энергией*, равной Mgh (т. е. возможностью совершить работу или приобрести кинетическую энергию), относительно поверхности земли.

Что произойдет с потенциальной энергией, когда частица из состояния покоя на поверхности земли (рис. 5.1) поднимется на высоту h? Для того чтобы тело поднялось на какую-то высоту, мы должны приложить к нему силу $F_{\text{прил}} (= -F_G)$, направленную вверх (рис. 5.2). В этом случае $x_0=0$. При этом *мы совершаем* над телом работу, равную

$$W = F_{\text{прил}} \cdot (x - x_0) = (Mg)(h) = Mgh, \tag{11}$$

и сообщаем этому телу потенциальную энергию Mgh, которой, как было указано ранее, оно обладает на высоте h (рис. 5.3).

Заметим, что работа, совершаемая силой тяжести над падающим телом и выражаемая соотношением (10), равна работе, которую мы совершаем против силы тяжести, поднимая тело вверх. Эта работа выражается соотношением (11).

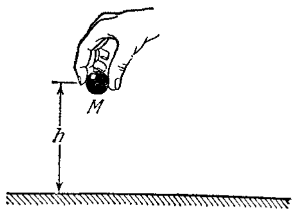

Рис. 5.3. Работа, которую нужно совершить, чтобы поднять массу M на высоту h, равна $W = F_{\text{прил}} \cdot h = +Mgh$. При этом потенциальная энергия U массы M увеличивается на величину Mgh.

Размерность потенциальной энергии совпадает с размерностью кинетической энергии:

$$[F] \cdot [L] = [M] \cdot [L^2]/[T^2].$$

Если $F_{\text{прил}} = 10^3$ *дин* и $h = 10^2$ *см*, то потенциальная энергия будет равна 10^3 *дин*$\cdot 10^2$ *см* $= 10^5$ *дин$\cdot$см* $= 10^5$ *эрг*. Мы будем обозначать потенциальную энергию символом U.

Из уравнения (10) видно, что потенциальная энергия Mgh может полностью превращаться в кинетическую энергию. Мы должны всегда указывать ту точку, к которой относится потенциальная энергия. Величина потенциальной энергии введена с «бухгалтерской» целью, т. е. для учета; в этом примере

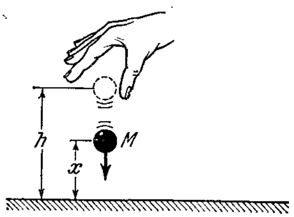

Рис. 5.4. Если отпустить шарик массы M, то потенциальная энергия U уменьшится, а кинетическая энергия K увеличится, но их сумма останется постоянной. На высоте x $U(x) = Mgx$ и $K(x) = \frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h-x)$.

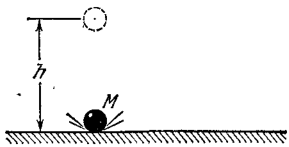

Рис. 5.5. Непосредственно перед тем, как шарик ударится о поверхность, вся потенциальная энергия, которой он обладал на высоте h, превратится в кинетическую энергию.

мы показали, что наша «бухгалтерия» не приводит к противоречиям. Изменение потенциальной энергии имеет определенный физический смысл и показывает нам, какая ее часть переходит в кинетическую энергию.

Если из (10) мы будем определять скорость v, причем не ту, которая приобретается при падении с высоты h, а скорость, приобретенную при падении с высоты $(h-x)$ (рис. 5.4), то по аналогии с уравнением (10) мы можем написать

$$\frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h-x), \tag{12}$$

или

$$\frac{1}{2} Mv^2 + Mgx = Mgh = E, \tag{13}$$

где E — постоянная величина, равная Mgh. Так как E представляет собой постоянную величину, то уравнение (13) выражает *закон сохранения энергии*:

$E = K + U =$
$$= \text{кинетическая энергия} + \text{потенциальная энергия} = \text{const} = \text{полная энергия}.$$

В соотношении (13) член Mgx представляет собой потенциальную энергию, обращающуюся в нуль при $x=0$. Величина E означает полную энергию, которая для изолированной системы сохраняет постоянное значение во времени.

Иногда удобно называть величину $E=K+U$, т. е. сумму кинетической и потенциальной энергии, функцией энергии. Кинетическая энергия K равна $^1/_2 Mv^2$. Потенциальная энергия зависит от действующей силы. Потенциальная энергия обладает весьма важным свойством, выражающимся в том, что $-\int F\,dx = U$, или

$$F = -\frac{dU}{dx}, \tag{14}$$

где F — сила, действующая на частицу и являющаяся результатом внутренних взаимодействий, таких, как электрические или гравитационные взаимодействия. (В рассмотренном выше примере $U = Mgx$ и $F=F_G=-Mg$.)

Перейдем теперь к более детальному и общему рассмотрению всех этих понятий.

5.3. Сохранение энергии

Закон сохранения энергии утверждает, что для системы частиц, взаимодействие между которыми неявно *) зависит от времени, *полная энергия системы постоянна*. Этот результат мы считаем достоверно установленным экспериментальным фактом. Если выражаться точнее, то этот закон говорит нам о том, что существует некоторая скалярная функция [такая, как функция $^1/_2 Mv^2 + Mgx$ в (13)] положения и скорости частиц, которая не изменяется со временем при условии, что в течение рассматриваемого промежутка времени внешнее взаимодействие явно не изменяется. Например, элементарный заряд e не должен изменяться со временем. Помимо

*) Рассматриваемая система состоит из частиц, как бы застывших на месте; тогда про силу, зависящую от времени, говорят, что такая сила явно зависит от времени.