с уравнением (10) мы можем написать

$$\frac{1}{2} Mv^2 = Mg(h - x), \tag{12}$$

или

$$\frac{1}{2} Mv^2 + Mgx = Mgh = E, \tag{13}$$

где $E$ — постоянная величина, равная $Mgh$. Так как $E$ представляет собой постоянную величину, то уравнение (13) выражает *закон сохранения энергии*:

$E = K + U =$
= кинетическая энергия + потенциальная энергия = const =
= полная энергия.

В соотношении (13) член $Mgx$ представляет собой потенциальную энергию, обращающуюся в нуль при $x=0$. Величина $E$ означает полную энергию, которая для изолированной системы сохраняет постоянное значение во времени.

Иногда удобно называть величину $E=K+U$, т. е. сумму кинетической и потенциальной энергии, функцией энергии. Кинетическая энергия $K$ равна $^1/_2 Mv^2$. Потенциальная энергия зависит от действующей силы. Потенциальная энергия обладает весьма важным свойством, выражающимся в том, что $-\int F\,dx = U$, или

$$F = -\frac{dU}{dx}, \tag{14}$$

где $F$ — сила, действующая на частицу и являющаяся результатом внутренних взаимодействий, таких, как электрические или гравитационные взаимодействия. (В рассмотренном выше примере $U = Mgx$ и $F = F_G = -Mg$.)

Перейдем теперь к более детальному и общему рассмотрению всех этих понятий.

## 5.3. Сохранение энергии

Закон сохранения энергии утверждает, что для системы частиц, взаимодействие между которыми неявно *) зависит от времени, *полная энергия системы постоянна.* Этот результат мы считаем достоверно установленным экспериментальным фактом. Если выражаться точнее, то этот закон говорит нам о том, что существует некоторая скалярная функция [такая, как функция $^1/_2 Mv^2 + Mgx$ в (13)] положения и скорости частиц, которая не изменяется со временем при условии, что в течение рассматриваемого промежутка времени внешнее взаимодействие явно не изменяется. Например, элементарный заряд $e$ не должен изменяться со временем. Помимо

*) Рассматриваемая система состоит из частиц, как бы застывших на месте; тогда про силу, зависящую от времени, говорят, что такая сила явно зависит от времени.

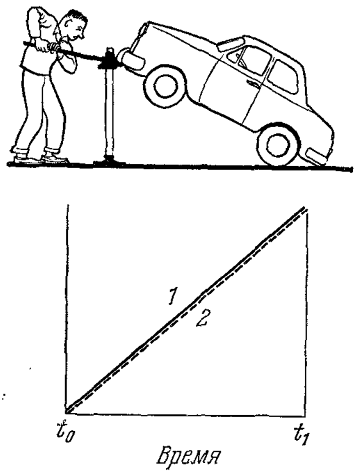


Рис. 5.6. Зависимость работы, производимой студентом при поднятии автомобиля домкратом для смены шины, от времени. (Работа, необходимая для поднятия небольшого автомобиля массой в 1000 *кг* на высоту 10 *см* равна $F=Mgh \cong (10^3 \cdot 10^3 г)\cdot(10^3 см/сек^2) \times$ $\times (10\ см)=10^{10}$ *эрг*.) При этом работа переходит в потенциальную энергию сил тяжести.

1 — работа, производимая студентом; 2 — потенциальная энергия (гравитационная).

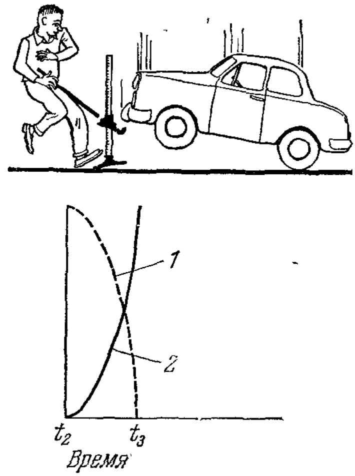


Рис. 5.7. Домкрат соскочил, и автомобиль падает вниз. Потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию. После того, как автомобиль коснулся земли, кинетическая энергия превратилась в тепло в амортизаторах, пружинах и шинах.

1 — потенциальная энергия (гравитационная); 2 — кинетическая энергия.

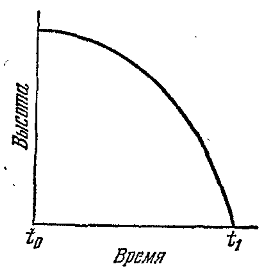


Рис. 5.8. Зависимость высоты от времени для тела, падающего на землю.

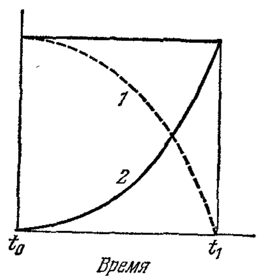


Рис. 5.9. Зависимость потенциальной и кинетической энергии от времени. Полная энергия представляет собой постоянную величину, равную сумме кинетической и потенциальной энергии.

1 — потенциальная энергия; 2 — кинетическая энергия.

функции энергии существуют также и другие функции, которые сохраняют постоянное значение в условиях, о которых только что было сказано. (Другие такие функции мы рассмотрим в гл. 6, в которой речь пойдет о сохранении импульса и момента импульса.) Энергия представляет собой скалярную величину, сохраняющую постоянное значение при движении. Когда мы говорим о внешнем взаимодействии, то имеем в виду, что в течение рассматриваемого промежутка времени физические законы и значения основных физических постоянных (таких, как $g$, $e$ или $m$) не изменяются.

Отметим еще раз, что законы сохранения сами по себе не дают нам никакой новой информации по сравнению с той, которая может быть получена из уравнения движения $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$.

Основная задача состоит в том, чтобы найти такое выражение для функции энергии, которое бы не зависело от времени и которое бы находилось в согласии с уравнением $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$. Так, например, выражение

$$\frac{d}{dx}E\equiv\frac{d}{dx}(K+U)=\frac{dK}{dx}-F_x=0$$

аналогично соотношению $F_x=Ma_x$. Это можно проверить, воспользовавшись (13), откуда следует, что

$$Mg=Mv\frac{dv}{dx}\equiv M\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}\equiv M\frac{dv}{dt}.$$

Это — фундаментальная задача классической механики, и ее правильное решение может быть получено несколькими способами, некоторые из которых весьма изящны. Так, в частности, формулировка задач механики с помощью функции Гамильтона (гамильтониан) позволяет интерпретировать их на языке квантовой механики. Однако в начале курса нам нужнее простое и непосредственное изложение, чем общность гамильтоновых и лагранжевых формулировок, обычно излагаемых в более поздних курсах *).

*Работа.* Мы определяем работу $W$, совершаемую постоянной силой $\mathbf{F}_{\text{прил}}$, приложенной к частице на пути $\Delta\mathbf{r}$, как произведение

$$W=\mathbf{F}_{\text{прил}}\cdot\Delta\mathbf{r}=F\,\Delta r\cos(\mathbf{F}_{\text{прил}},\ \Delta\mathbf{r}),\qquad(15)$$

согласно определению, которое было дано выше соотношением (6). Для удобства в двух следующих параграфах вместо $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ мы будем писать просто $\mathbf{f}$.

Предположим, что $\mathbf{f}$ не постоянна, а зависит от $\mathbf{r}$, т. е. является функцией положения $\mathbf{f}(\mathbf{r})$. Если весь путь может быть разбит на $N$ прямолинейных отрезков и в пределах каждого такого отрезка силу $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ можно считать постоянной, то мы можем написать

$$W=\mathbf{f}(\mathbf{r}_1)\cdot\Delta\mathbf{r}_1+\mathbf{f}(\mathbf{r}_2)\cdot\Delta\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{f}(\mathbf{r}_N)\cdot\Delta\mathbf{r}_N\equiv\sum_{j=1}^{N}\mathbf{f}(\mathbf{r}_j)\cdot\Delta\mathbf{r}_j,\ (16)$$

*) Решение лагранжевых уравнений движения требует знакомства с некоторыми основными выводами вариационного исчисления; поэтому сейчас мы не будем заниматься этим вопросом.

где символ $\sum$ означает суммирование по всем отрезкам. Это соотношение выполняется строго лишь в пределе, для бесконечно малых перемещений $d\mathbf{r}$, так как криволинейный путь не может быть разбит на конечное число прямолинейных отрезков. Предел

$$\lim_{\Delta r \to 0} \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{17}$$

представляет собой интеграл от проекции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ на направление внутри перемещения $d\mathbf{r}$. Этот интеграл называется *линейным интегралом функции* $\mathbf{f}$ от точки $A$ до точки $B$. Работа, совершаемая приложенной силой на всем перемещении, определяется соотношением

$$\boxed{W(A \to B) \equiv \int_A^B \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}.} \tag{18}$$

## 5.4. Кинетическая энергия

Вернемся теперь к свободной частице в межгалактическом пространстве. Напишем уравнение (6)

$$\frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 = F_{\text{прил}} \cdot (x - x_0)$$

в более общей форме, включив в него приложенную силу, изменяющуюся по направлению и по величине. Подставив в (18) вместо $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ ее значение $\mathbf{F}_{\text{прил}} = M\dot{\mathbf{v}}$, получим следующее выражение для работы, совершаемой приложенной силой:

$$\boxed{W(A \to B) = M \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}.} \tag{19}$$

Далее, так как

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v}\, dt, \tag{20}$$

находим, что

$$W(A \to B) = M \int_A^B \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt. \tag{21}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}, \tag{22}$$