где символ $\sum$ означает суммирование по всем отрезкам. Это соотношение выполняется строго лишь в пределе, для бесконечно малых перемещений $d\mathbf{r}$, так как криволинейный путь не может быть разбит на конечное число прямолинейных отрезков. Предел

$$\lim_{\Delta r \to 0} \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{17}$$

представляет собой интеграл от проекции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ на направление внутри перемещения $d\mathbf{r}$. Этот интеграл называется *линейным интегралом функции* $\mathbf{f}$ от точки A до точки B. Работа, совершаемая приложенной силой на всем перемещении, определяется соотношением

$$\boxed{W(A \longrightarrow B) \equiv \int_A^B \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}.} \tag{18}$$

5.4. Кинетическая энергия

Вернемся теперь к свободной частице в межгалактическом пространстве. Напишем уравнение (6)

$$\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = F_{\text{прил}} \cdot (x - x_0)$$

в более общей форме, включив в него приложенную силу, изменяющуюся по направлению и по величине. Подставив в (18) вместо $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ ее значение $\mathbf{F}_{\text{прил}} = M\dot{\mathbf{v}}$, получим следующее выражение для работы, совершаемой приложенной силой:

$$\boxed{W(A \longrightarrow B) = M \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}.} \tag{19}$$

Далее, так как

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v}\, dt, \tag{20}$$

находим, что

$$W(A \longrightarrow B) = M \int_A^B \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt. \tag{21}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}, \tag{22}$$

получим

$$2\int_A^B \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt=\int_A^B \frac{d}{dt}(v^2)\,dt=\int_A^B d(v^2)=v_B^2-v_A^2. \qquad (23)$$

Подставляя это выражение в (21), приходим к следующему важному результату для свободной частицы:

$$\boxed{W(A\to B)=\int_A^B \mathbf{F}_{\text{прил}}\cdot d\mathbf{r}=\frac{1}{2}Mv_B^2-\frac{1}{2}Mv_A^2.} \qquad (24)$$

Это уравнение представляет собой обобщение уравнения (6).

Величину

$$K\equiv\frac{1}{2}Mv^2 \qquad (25)$$

мы будем называть *кинетической энергией* и обозначать символом K. Из (24) мы видим, что наши определения работы и кинетической энергии обладают тем свойством, что *работа, совершаемая над свободной частицей произвольной приложенной силой, равна изменению кинетической энергии частицы*:

$$W(A\to B)=K_B-K_A. \qquad (25a)$$

Пример. *Свободное падение.* а) Если ось x направлена перпендикулярно к поверхности земли вверх, то сила тяжести $\mathbf{F}_G=-Mg\hat{\mathbf{x}}$, где g — ускорение силы тяжести, равное приблизительно 980 *см/сек*^{2}. Вычислим работу, совершаемую силой тяжести при падении массы в 100 *г* с высоты 10 *см*.

В этом случае

$$\mathbf{r}_A=0,\quad \mathbf{r}_B=-10\hat{\mathbf{x}},\quad \Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A=-10\hat{\mathbf{x}}.$$

Из (15) следует, что работа, совершаемая силой тяжести, равна

$$W=\mathbf{F}_G\cdot\Delta\mathbf{r}=(-Mg\hat{\mathbf{x}})\cdot(-10\hat{\mathbf{x}})\approx(10^2)(10^3)(10)\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}\approx 10^6\ \text{эрг}.$$

В этом примере сила тяжести играет роль силы $\mathbf{F}_{\text{прил}}$.

б) Если частица, о которой шла речь в а), первоначально находилась в покое, то чему будут равны ее кинетическая энергия и скорость в конце десятого сантиметра пути падения?

Начальное значение кинетической энергии $K_A=0$. Конечное значение K_B, в соответствии с (25а), равно работе, совершаемой силой тяжести над частицей:

$$K_B=\frac{1}{2}Mv_B^2\approx 10^6\ \text{эрг}, \qquad (26)$$

откуда для v_B^2 находим $v_B^2\approx 2\cdot 10^6$ *эрг*/100 *г*$\approx 2\cdot 10^4$ *см*^{2}/*сек*^{2}. Этот результат совпадает с тем, который мы получим, если воспользуемся элементарным соотношением $v^2 = 2gh$, в котором ускорение постоянно и начальная скорость равна нулю:

$$v^2 = 2\cdot 10^3 \text{ см/сек}^2 \cdot 10 \text{ см} \approx 2\cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}^2.$$

Это совпадение может иллюстрировать высказанную выше идею о том, что результаты, полученные с помощью закона сохранения, должны совпадать с выводами, получаемыми из уравнений движения. В рассмотренном случае, применяя закон сохранения

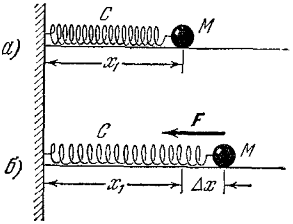

Рис. 5.10. Невесомая пружина связана с массой M. Если пружина растянута на малую величину Δx, то возникает восстанавливающаяся сила $F = -C\,\Delta x$, действующая на массу M в направлении, показанном стрелкой. Здесь C означает силовую постоянную пружины. *а*) Пружина в равновесии. *б*) Пружина растянута.

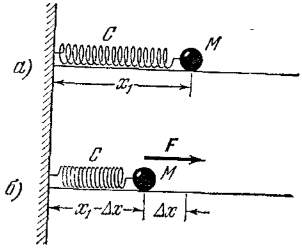

Рис. 5.11. Если пружина сжата на величину $-\Delta x$, то в ней возникает восстанавливающая сила $-C(-\Delta x) = C\,\Delta x$, действующая на массу M в направлении, указанном стрелкой. *а*) Пружина в равновесии. *б*) Пружина сжата.

энергии, мы получим тот же результат, что и при использовании соотношения $v^2=2gh$, получаемого из уравнения движения $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$.

П р и м е р. *Линейная восстанавливающая сила.* Предположим, что на частицу действует линейная восстанавливающая сила в направлении оси x. Линейной восстанавливающей силой мы будем называть силу, прямо пропорциональную величине смещения, измеряемого от некоторой фиксированной точки, и действующую в направлении уменьшения смещения. Если мы примем эту фиксированную точку за начало, то

$$\mathbf{F} = -Cx\hat{\mathbf{x}}, \quad \text{или} \quad F_x = -Cx, \tag{27}$$

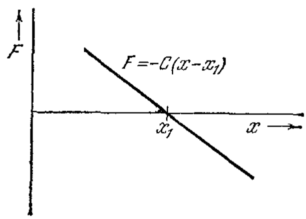

Рис. 5.12. Восстанавливающая сила в пределах малых смещений от x_1 пропорциональна величине смещения.

где C — некоторая положительная величина, называемая *силовой постоянной*. Это соотношение выражает закон Гука. Для достаточно малых смещений Δx такая сила может возникать в растянутой или сжатой пружине (рис. 5.10—5.12). Для больших упругих смещений мы должны добавить в (27) члены, содержащие более высокие степени x, как это будет сделано в гл. 7. Знак силы должен быть таким, чтобы частица всегда притягивалась к точке, принятой за начало отсчета ($x=0$).

1) Пусть к частице, прикрепленной к пружине, приложена внешняя сила, которая перемещает эту частицу из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2. Чему равна работа, совершаемая силой, приложенной к частице на этом пути?

В этом случае сила, действующая на частицу, является функцией положения. Для того чтобы вычислить работу, совершаемую приложенной силой, мы используем определение, содержащееся в соотношении (18) для $\mathbf{F}_{\text{прил}} = -\mathbf{F} = +Cx\hat{\mathbf{x}}$:

$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r} = C \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{1}{2} C (x_2^2 - x_1^2). \qquad (28)$$

(Здесь $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ представляет собой силу, приложенную *кем-то* против силы самой пружины, а *не ту* силу, с которой сама пружина действует на массу. Масса не приобретает кинетическую энергию, если

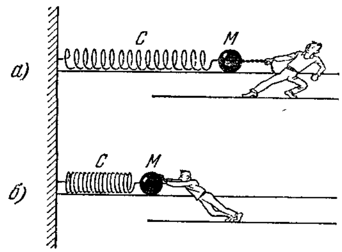

Рис. 5.13. Для того чтобы растянуть (*а*) или сжать (б) пружину, вы должны приложить силу в направлении, противоположном направлению действия восстанавливающей силы. При смещении пружины из положения равновесия x_1 на величину Δx вы совершаете работу

$$W = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} C(x - x_1)\,dx = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2.$$

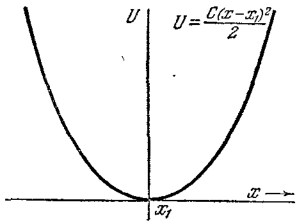

Рис. 5.14. Совершая работу, вы увеличиваете потенциальную энергию системы пружина — масса. Эта система, смещаясь из положения равновесия на величину $\Delta x = x - x_1$ приобретает потенциальную энергию

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} C (x - x_1)^2.$$

на нее действуют две равные и противоположно направленные силы.) Если принять начальную точку с координатой x_1 за начало отсчета и положить $x_1 = 0$, то из (28) следует, что

$$W(x_{\max} \to 0) = \frac{1}{2} Cx^2. \qquad (29)$$

Это очень важный результат: работа, совершаемая над системой приложенной силой, пропорциональна квадрату смещения (рис. 5.13—5.16).

2) Частица массой M покоится в положении $x_{\max}$ и затем отпускается. Какова будет ее кинетическая энергия, когда она достигнет начала отсчета?

Мы получили ответ непосредственно из (24): работа, совершаемая п р у ж и н о й при перемещении массы M из положения x_{max} в положение, соответствующее началу отсчета, равна

$$W(x_{max} \to 0) = \frac{1}{2} M v_1^2, \tag{30}$$

так как при $x = x_{max}$ $v = 0$, потому что в этом положении мы считаем, что частица находится в состоянии покоя. Когда частица проходит

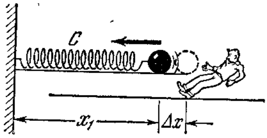

Рис. 5.15. Если система пружина — масса растянута на величину Δx и затем отпущена, то сначала U уменьшается, а K увеличивается.

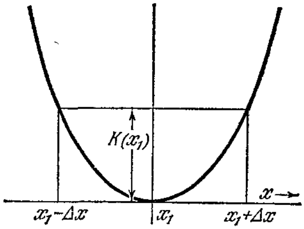

Рис. 5.16. При $x = x_1$ $U = 0$ и $K(x_1) = \frac{1}{2} C (\Delta x)^2$, как это показано на рисунке.

через начало отсчета, ее скорость v_1 может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{2} C x^2 = \frac{1}{2} M v_1^2, \tag{31}$$

в котором правая часть представляет собой кинетическую энергию частицы в положении $x = 0$.

3) Какова связь между скоростью частицы в начале отсчета и максимальным значением смещения x_{max}?

Из (31) находим

$$v_1^2 = \frac{C}{M} x_{max}^2, \tag{32}$$

или

$$v_1 = \pm \sqrt{\frac{C}{M}} x_{max}. \tag{33}$$

Мощность. Мощность P представляет собой скорость передачи энергии. Мы определили работу, совершаемую силой, приложенной к частице на пути $\Delta \mathbf{r}$ как произведение

$$\Delta W = \mathbf{F}_{прил} \cdot \Delta \mathbf{r}. \tag{34}$$

Скорость, с которой сила совершает работу, равна

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F}_{прил} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{35}$$

В пределе, при $\Delta t \to 0$, мы получаем для мощности

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}_{прил} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}_{прил} \cdot \mathbf{v}.} \tag{36}$$

Если мощность зависит от времени, т. е. $P=P(t)$, то работу можно выразить следующим образом:

$$W(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt.$$

В системе СГС *единицей мощности является эрг в секунду*. В системе МКС единицей мощности является джоуль в секунду; эта единица называется *ваттом*. Для того чтобы найти мощность в *эрг/сек*, нужно мощность, выраженную в ваттах, умножить на 10^7. Если же мощность дана в лошадиных силах, то для того, чтобы выразить ее в ваттах, нужно умножить число лошадиных сил приблизительно на 746.

Консервативные силы. Сила называется *консервативной*, если работа $W(A \to B)$, совершаемая силой при перемещении частицы из A в B, не зависит от пути, по которому частица перемещается из A в B. Это иллюстрируется уравнением (24). Таким образом, так как $W(A \to B) = -W(B \to A)$, мы видим, что если частица движется по замкнутому пути, то работа, совершаемая консервативной силой, равна нулю.

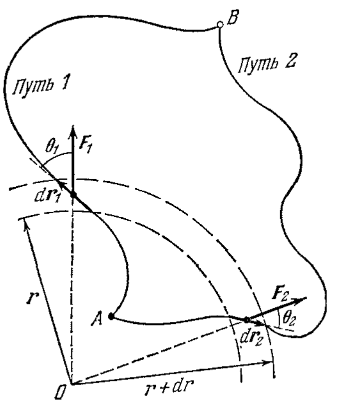

Рис 5.17.

Мы легко можем убедиться в том, что центральная сила является консервативной. Центральная сила, действующая между двумя частицами, представляет собой силу, величина которой зависит только от расстояния между частицами и направление которой совпадает с линией, соединяющей обе частицы. На рис. 5.17 центральная сила направлена от центра (или к центру), расположенного в точке O. На этом же рисунке изображены два пути 1 и 2, соединяющие точки A и B. Пунктирными линиями изображены дуги окружностей с центром в точке O. Рассмотрим величины $(\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1)$ и $(\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2)$ для отрезков путей, заключенных между пунктирными дугами окружностей. Как легко убедиться, произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F\,dr\cos\theta$ равно проекции $\mathbf{F}$ на $d\mathbf{r}$ или $d\mathbf{r}$ на $\mathbf{F}$. Величины F_1 и F_2 равны между собой на обоих отрезках путей, так как они расположены на одинаковых расстояниях от точки O; проекции $dr\cos\theta$ отрезков путей на соответствующие векторы $\mathbf{F}$ также равны, потому что расстояние между окружностями, измеренное по направлению $\mathbf{F}_1$, равно расстоянию, измеренному по направлению $\mathbf{F}_2$. Поэтому на рассматриваемых отрезках путей

$$(\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1) = (\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2). \tag{37}$$

Такое рассуждение может быть повторено для всех сравниваемых между собой отрезков обоих путей, и поэтому

$$\underset{\text{По пути } 1}{\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}} = \underset{\text{По пути } 2}{\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}. \tag{38}$$

Силы, для которых

$$W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{39}$$

не зависит от пути, называются *консервативными силами*. Для консервативных сил работа по замкнутому пути равна нулю.

Предположим, что сила зависит от скорости, с которой проходится путь (например, сила, с которой магнитное поле действует на заряженную частицу, зависит от скорости). Может ли такая сила считаться консервативной? Из сказанного выше следует, что все наиболее важные основные силы, зависящие от скорости, являются консервативными, так как их направление *перпендикулярно* направлению движения частицы и поэтому произведение $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ равно нулю. Вы можете убедиться в этом на примере силы Лоренца (см. гл. 4), которая пропорциональна произведению $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. В то же время силы трения, не относящиеся к числу основных сил, хотя и зависят от скорости, но не являются консервативными.

Все наше обсуждение предполагает, что речь идет о *силах, действующих между двумя телами*. Это очень важное предположение; между тем студентам, изучающим этот курс, в их дальнейшей исследовательской работе придется иметь дело с силами, действующими между несколькими телами. Рассмотрение этого вопроса, включающее и случай двух тел, приводится во втором томе.

Из опыта мы знаем, что работа $W(A \to B)$ не зависит от пути для гравитационных и электростатических сил. Такой результат, в частности, получен для сил взаимодействия между элементарными частицами из опытов по их рассеянию; для гравитационных сил этот результат вытекает из возможности правильного предсказания движения планет и Луны, о чем рассказывается в разделе «Из истории физики». Мы знаем также, что Земля совершила около $4\cdot 10^9$ полных оборотов вокруг Солнца без сколько-нибудь заметного изменения расстояния до него. Постоянство этого расстояния доказывается геологическими данными о температуре поверхности Земли. По этим геологическим данным возраст Земли оценивается приблизительно в 10^9 лет. Однако эти данные не могут считаться достаточно надежными, потому что многочисленные факторы, и в том числе выбросы вещества на Солнце, оказывают влияние на температуру Земли. Дальнейшие примеры рассматриваются в разделе «Из истории физики» в конце главы.

Рассмотрим более подробно вопрос о центральных и нецентральных силах. При рассмотрении сил, действующих между двумя частицами, следует различать две возможности: 1) частицы обладают только теми координатами, которые определяют их положение; 2) одна или обе частицы обладают физическими осями вращения. В первом случае речь может идти только о центральной силе, тогда как во втором случае, если мы говорим: частица движется от A к B — этого, однако, недостаточно и мы должны еще указать, что ось закреплена относительно чего-то в том же направлении. Магнит в виде стержня обладает физически различимой осью: если мы будем двигать целиком весь магнит по замкнутому пути в однородном магнитном поле, то, перемещая магнит, мы или совершим определенную работу, или не совершим ее совсем. Если расположение магнита и ориентировка в начале и в конце будут одинаковы, то никакой работы мы не совершим. Если же расположение будет тем же самым, но ориентировка другой, то будет совершена определенная работа (при этом работа может иметь как положительный, так и отрицательный знак).

Силы трения, строго говоря, не являются консервативными. Два тела могут испытать неупругое столкновение, при котором их кинетическая энергия рассеивается в этих телах и превращается в тепло.

Само собой разумеется, что в том случае, когда основные силы консервативны, то и все движения должны быть консервативны, если только проанализировать их достаточно детально. Поэтому учет трения — это, в сущности, бухгалтерский учет: если какая-то часть энергии уходит в бесполезной для нас форме, то мы можем назвать это трением. При обсуждении в гл. 3 закона сохранения импульса мы рассмотрели неупругое столкновение двух частиц. При этом кинетическая энергия не сохраняла постоянного значения; но мы допустили, что сумма кинетической энергии и внутренней энергии обеих частиц, которую мы называли полной энергией, сохраняла постоянное значение, что соответствует всем известным нам экспериментальным фактам.

5.5. Потенциальная энергия

Мы видели, что с помощью соответствующим образом приложенной силы $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ можно уравновесить любые другие силы (например, силу тяжести), действующие на частицу, так, чтобы в этом процессе частицы не приобретали бы кинетическую энергию.

Как уже было сказано, в таких случаях работа, совершаемая при перемещении частицы, переходит в ее потенциальную энергию. Мы, например, принимаем, что разность потенциальных энергий частицы в точках **B** и **A** равна работе, совершаемой приложенной силой над этой частицей при ее перемещении из A в B:

$$\boxed{U(\mathbf{B}) \rightarrow U(\mathbf{A}) = W(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}.} \qquad (40)$$