только теми координатами, которые определяют их положение; 2) одна или обе частицы обладают физическими осями вращения. В первом случае речь может идти только о центральной силе, тогда как во втором случае, если мы говорим: частица движется от A к B — этого, однако, недостаточно и мы должны еще указать, что ось закреплена относительно чего-то в том же направлении. Магнит в виде стержня обладает физически различимой осью: если мы будем двигать целиком весь магнит по замкнутому пути в однородном магнитном поле, то, перемещая магнит, мы или совершим определенную работу, или не совершим ее совсем. Если расположение магнита и ориентировка в начале и в конце будут одинаковы, то никакой работы мы не совершим. Если же расположение будет тем же самым, но ориентировка другой, то будет совершена определенная работа (при этом работа может иметь как положительный, так и отрицательный знак).

Силы трения, строго говоря, не являются консервативными. Два тела могут испытать неупругое столкновение, при котором их кинетическая энергия рассеивается в этих телах и превращается в тепло.

Само собой разумеется, что в том случае, когда основные силы консервативны, то и все движения должны быть консервативны, если только проанализировать их достаточно детально. Поэтому учет трения — это, в сущности, бухгалтерский учет: если какая-то часть энергии уходит в бесполезной для нас форме, то мы можем назвать это трением. При обсуждении в гл. 3 закона сохранения импульса мы рассмотрели неупругое столкновение двух частиц. При этом кинетическая энергия не сохраняла постоянного значения; но мы допустили, что сумма кинетической энергии и внутренней энергии обеих частиц, которую мы называли полной энергией, сохраняла постоянное значение, что соответствует всем известным нам экспериментальным фактам.

5.5. Потенциальная энергия

Мы видели, что с помощью соответствующим образом приложенной силы $\mathbf{F}_{\text{прил}}$ можно уравновесить любые другие силы (например, силу тяжести), действующие на частицу, так, чтобы в этом процессе частицы не приобретали бы кинетическую энергию.

Как уже было сказано, в таких случаях работа, совершаемая при перемещении частицы, переходит в ее потенциальную энергию. Мы, например, принимаем, что разность потенциальных энергий частицы в точках **B** и **A** равна работе, совершаемой приложенной силой над этой частицей при ее перемещении из A в B:

$$\boxed{U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A}) = W(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}.} \qquad (40)$$

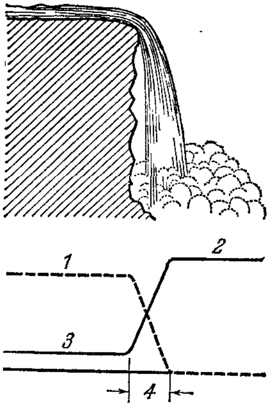

Рис. 5.18. Вода на вершине водопада обладает потенциальной энергией, которая при падении воды превращается в кинетическую энергию. Масса M воды, падая с высоты h, теряет потенциальную энергию Mgh и приобретает кинетическую энергию $\frac{1}{2}M(v^2-v_0^2)=$ $=Mgh$; если известна начальная скорость v_0 воды, то скорость v определяется этим уравнением. Кинетическая энергия падающей воды может быть превращена на электростанции в кинетическую энергию вращающейся турбины; кроме того, кинетическая энергия падающей воды у подножья водопада превращается в тепло. Тепловая энергия представляет собой попросту энергию беспорядочного движения молекул воды. (При высокой температуре беспорядочное движение молекул более энергично, чем при низкой температуре.)

1 — потенциальная энергия; *2* — поток плюс тепловое движение (тепло); *3* — кинетическая энергия; *4* — область падающей воды.

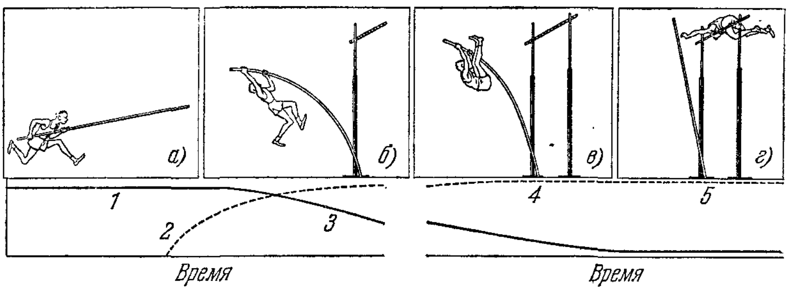

Рис. 5.19. Движение прыгуна с шестом. В положении *а*) вся энергия представляет собой кинетическую энергию, зависящую от скорости, с которой бегун бежит. В положении *б*) прыгун опирает передний конец шеста о землю и (в особенности, если шест сделан из стеклянного волокна) запасает упругую потенциальную энергию в шесте, изгибая его. В положении *в*) прыгун поднимается в воздух; его кинетическая энергия переходит в энергию вращательного движения вокруг нижнего конца шеста. Прыгун обладает потенциальной энергией как за счет силы тяжести, так и за счет оставшейся упругой энергии шеста. В положении *г*), когда прыгун находится над планкой, его кинетическая энергия мала, так как он движется медленно, его потенциальная энергия (гравитационная), наоборот, велика. Полная энергия прыгуна с шестом не всегда остается постоянной, потому что часть энергии расходуется на преодоление трения (внешнего и мускульного), а также на работу, совершаемую прыгуном при изгибе шеста.

1 — кинетическая энергия бегущего прыгуна; *2* — упругая энергия изогнутого шеста; *3* — кинетическая энергия вращающегося прыгуна; *4* — потенциальная энергия; *5* — гравитационная энергия.

Здесь мы исходим из допущения, что силы консервативны; при этом $U(\mathbf{r})$ будет однозначной функцией *) положения, а разность $U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A})$ будет равна увеличению кинетической энергии частицы при возвращении из **B** в **A** *по прекращении действия приложенной силы.*

Фиксируя значение U в некоторой точке, например в **A**, можно, исходя из соотношения (40), определить $U(\mathbf{r})$ в любой другой точке по формуле

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{A}) + \int\limits_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r}.} \tag{41}$$

Значение постоянной $U(\mathbf{A})$ не определено, так что (41) определяет $U(\mathbf{r})$ только с точностью до постоянной, которую мы можем выбрать произвольно по нашему усмотрению. Физический смысл имеет только разность $U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{A})$ потенциальных энергий между двумя точками **r** и **A**. Во многих задачах **A** выбирается на бесконечно большом расстоянии и значение $U(\infty)$ принимается равным нулю. Тогда

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \int\limits_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{\text{прил}} \cdot d\mathbf{r} = W(\infty \to \mathbf{r}).} \tag{42}$$

При этом условии потенциальная энергия в точке, определяемой вектором **r**, *равна работе, совершаемой приложенной силой при перемещении частицы из бесконечности в эту точку.*

Мы ввели здесь приложенную силу $\mathbf{F}_{\text{прил.}}$ из педагогических соображений: для того чтобы иметь возможность перемещать частицу из одной точки **A** в другую точку **B** таким образом, чтобы эта частица не приобретала кинетическую энергию. Если частица взаимодействует с окружающей средой и испытывает действие других сил (например, гравитационных или электростатических), мы можем обозначить эти внутренние силы, или силы взаимодействия, через $\mathbf{F}_{\text{внутр.}}$ или просто через **F**. Мы определяем силу $\mathbf{F}_{\text{прил.}}$, которую мы прилагаем, так, чтобы она в точности уравновешивала внутреннюю силу **F**, т. е.

$$\mathbf{F}_{\text{прил}} = -\mathbf{F}_{\text{внутр}}. \tag{43}$$

*) Функция $f(x)$ называется однозначной, если каждому значению x соответствует одно и только одно значение $f(x)$. Например, $\sin x$ является однозначной функцией x, но функция $\arcsin x$ представляет собой неоднозначную функцию.

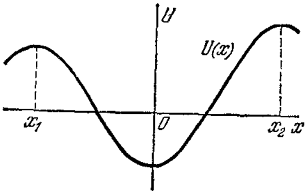

Рис. 5.20. График зависимости потенциальной энергии U от координаты x (одномерный случай). В точках $x=x_1$, 0 и x_2 мы видим, что $dU/dx=0$, и поэтому в этих точках сила обращается в нуль. Эти точки соответствуют положениям равновесия, и при этом не обязательно устойчивого

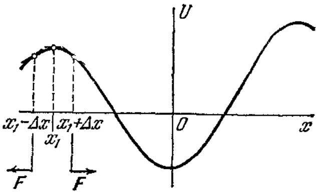

Рис. 5.21. В точке $x_1-\Delta x$: $dU/ax > 0$, а следовательно, $F < 0$ (слева от горба). В точке $x_1+\Delta x$: $dU/dx < 0$ и потому $F > 0$ (справа от горба). Поэтому малое смещение от точки x_1 приводит к появлению силы, увеличивающей величину смещения. Точка x_1 соответствует положению *неустойчивого* равновесия.

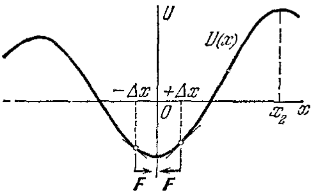

Рис. 5.22. В точке $x=-\Delta x$: $dU/dx < 0$ и сила F направлена направо. Если $x=+\Delta x$, то $dU/dx > 0$ и сила направлена налево. Поэтому точка $x=0$ соответствует положению *устойчивого* равновесия. Что можно сказать о точке x_2?

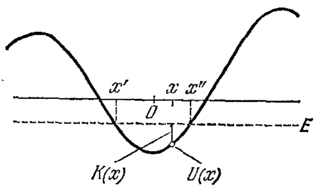

Рис. 5.23. Полная энергия $E=K+U=$ $=\mathrm{const}$. Поэтому при данном значении полной энергии E движение может происходить только между точками x' и x'', каждая из которых является «поворотной точкой». Между этими точками $K=\frac{1}{2}Mv^2=E-U \geqslant 0$.

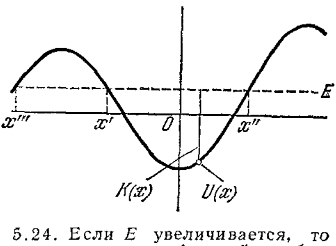

Рис. 5.24. Если E увеличивается, то «поворотные точки» x' и x'', вообще говоря, изменяются. При этом $K(x)=$ $=E-U(x)$ тоже увеличивается. Движение может происходить также и левее точки x'''.

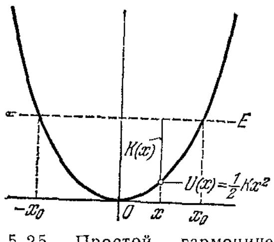

Рис. 5.25. Простой гармонический осциллятор находится в устойчивом равновесии при $x=0$. При $x=\pm x_0$ $K=0$

После этого (41) и (42) можно переписать в таком виде:

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{A}) - \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{44}$$

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.} \tag{44a}$$

Очень важно знать, идет ли речь о силе $\mathbf{F}$, которая задана условиями задачи, или о силе $\mathbf{F}_{\text{прил}}$, которая введена соотношением (42) только для того, чтобы определить потенциальную энергию. В (44а) мы определили потенциальную энергию, использовав понятие только силы $\mathbf{F}$.

Для случая одного измерения

$$U(x) - U(A) = -\int_{A}^{x} F\,dx, \tag{45}$$

откуда после дифференцирования получаем

$$\boxed{\frac{dU}{dx} = -F.} \tag{46}$$

Этот результат может быть проверен, если (46) подставить в (45):

$$-\int_{A}^{x} F\,dx = \int_{A}^{x} \frac{dU}{dx}\,dx = \int_{A}^{x} dU = U(x) - U(A). \tag{47}$$

Соотношение (46) является частным случаем общего вывода о том, что сила равна взятой со знаком минус производной от потенциальной энергии по координате. Для трехмерного случая выражение, аналогичное (46), будет иметь вид *)

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U}{\partial z} \equiv -\operatorname{grad} U, \tag{48}$$

---

*) Производные, в которых фигурирует знак ∂ вместо d [как, например, в (48) или (49)], называются частными производными. Если у нас имеется функция $f(x_1, x_2, \ldots)$ двух или большего числа независимых переменных $x_1, x_2, \ldots$ и мы хотим дифференцировать функцию по одной из этих переменных при условии, что остальные переменные остаются постоянными, то такая операция называется вычислением частной производной.

Таким образом,

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,\,z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Индексы y, z означают, что при этой операции y и z сохраняются постоянными.

где символ grad означает оператор градиента, который в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\mathrm{grad} \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{49}$$

Общие свойства оператора градиента рассматриваются во втором томе. Там показано, что градиент скалярной величины представляет собой вектор, направление которого совпадает с направлением наибольшего увеличения скалярной функции, а величина равна скорости изменения этой функции. Градиент скалярной величины записывается различным образом: grad U, ∇U или $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$. Оператор ∇ читается «набла», а ∇U читается «набла U».

Потенциальная энергия электрического поля. Предположим, что в каждой точке пространства известна напряженность электрического поля. Предположим, далее, что это поле создается неподвижными электрическими зарядами, распределенными в пространстве.

В гл. 3 мы видели, что вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ определялся как сила, действующая на единичный положительный заряд, находящийся в покое, и в соответствии с законом Кулона $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ можно вычислить из соотношения

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i), \tag{50}$$

в котором суммирование проводится по всем зарядам. Заряд q_i находится в точке, определенной радиусом-вектором $\mathbf{r}_i$. Предположим, что мы переносим из бесконечности пробный заряд q. Сила, действующая на заряд q на расстоянии $\mathbf{r}$, равна

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{51}$$

Потенциальная энергия заряда q в поле всех других зарядов может быть найдена из соотношения (44а):

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' = q\int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'. \tag{52}$$

В этой формуле мы пометили штрихом переменные под знаком интеграла для того, чтобы не было путаницы с точкой, определяемой вектором $\mathbf{r}$, в которой определяется потенциал.

Электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ *в точке, определяемой вектором* $\mathbf{r}$, *измеряется потенциальной энергией, которой обладает единица положительного заряда*:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q} = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}. \tag{53}$$

Это очень полезная величина. Отметим прежде всего, что она является скаляром. Очень важно не путать потенциал φ с потенциальной энергией U. Кроме того, при решении задач остерегайтесь применять обозначение U для этих двух величин: электростатического потенциала и потенциальной энергии.

Если в любой точке пространства мы знаем напряженность поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, то мы можем найти также в любой точке пространства электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ (предполагается, что нам известны заряды, создающие поле). Заметим, что гораздо удобнее иметь дело с потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$, являющимся скаляром, чем с напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, представляющей собой векторную величину.

Падение напряжения, или *разность потенциалов* (р. п.), между двумя точками, определяемыми векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, выражается соотношением

$$\text{р. п.} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1). \tag{54}$$

Эта величина представляет собой изменение электростатической потенциальной энергии единицы положительного заряда при перемещении его из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$. При перемещении из одной точки в другую заряда q разность потенциальных энергий будет равна

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = q\,[\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)]. \tag{54а}$$

Единицей электростатического потенциала (или разности потенциалов) в гауссовой системе единиц СГСЭ является *единица потенциала СГСЭ* (ед. СГСЭ$_\text{v}$). В гл. 4 мы видели, что единицей напряженности электрического поля является ед. СГСЭ$_\text{v}$/*см*, но так как размерность φ отличается от $\mathbf{E}$, то φ измеряется в единицах СГСЭ$_\text{v}$. Так как размерность φ равна [заряд/длина], то единица измерения потенциала равна ед. СГСЭ$_\text{q}$/*см*.

Практической единицей электростатического потенциала (или разности потенциалов) является *вольт* (*в*). Эта единица используется в повседневной жизни и широко применяется в лабораторной практике. Вольт *определяется* следующим образом:

$$\left(\frac{c}{10^8}\right) \times \begin{pmatrix}\text{разность потенциалов}\\ \text{в ед. СГСЭ}_\text{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{разность потенциалов}\\ \text{в вольтах}\end{pmatrix}, \tag{54б}$$

где c — скорость света в *см/сек*. Приближенно

$$\boxed{(300) \times \begin{pmatrix}\text{разность потенциалов}\\ \text{в ед. СГСЭ}_\text{v})\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}\text{разность потенциалов}\\ \text{в вольтах}\end{pmatrix}.} \tag{54в}$$

П р и м е р ы. *Электростатическое поле и потенциал*; *разность потенциалов*; *единица напряженности электрического поля в системе СГСЭ*; *вольты*.

а) Какова напряженность электрического поля на расстоянии 1 Å (10^{-8} *см*) от протона?

Из закона Кулона находим, что

$$E = \frac{e}{r^2} \cong \frac{5\cdot 10^{-10}\ \text{ед. СГСЭ}_\text{q}}{(1\cdot 10^{-8}\ \textit{см})^2} \cong 5\cdot 10^6\ \text{ед. СГСЭ}_\text{v}/\textit{см} \cong$$
$$\cong 300\cdot(5\cdot 10^6)\ \textit{в/см} \cong 1{,}5\cdot 10^9\ \textit{в/см}.$$

Поле направлено радиально от протона.

б) Чему равен электростатический потенциал на этом расстоянии?

Из (53), полагая при $r=\infty$ $U=0$, находим

$$\varphi(r)=\int_r^\infty \frac{e}{r^2}\,dr=\frac{e}{r}\cong\frac{5\cdot 10^{-10}\text{ ед. СГСЭ}_q}{1\cdot 10^{-8}\text{ см}}=5\cdot 10^{-2}\text{ ед. СГСЭ}_v=15\text{ в}.$$

в) Чему равна разность потенциалов (в *в*) между точками, находящимися на расстоянии 1 Å и 0,2 Å от протона?

Потенциал на расстоянии $1\cdot 10^{-8}$ *см* равен 15 *в*; на расстоянии $0{,}2\cdot 10^{-8}$ *см* он равен 75 *в*. Разность потенциалов равна 75 *в*—15 *в*=

$$=60\text{ в, или }\frac{60\text{ ед. СГСЭ}_v}{300}=0{,}2\text{ ед. СГСЭ}_v.$$

г) Протон отталкивается от другого протона, находящегося от него на расстоянии 1 Å. Какова будет кинетическая энергия, когда протоны окажутся на бесконечно большом расстоянии друг от друга?

Из закона сохранения энергии мы знаем, что кинетическая энергия должна равняться первоначальной потенциальной энергии:

$$\frac{e^2}{r}\cong\frac{(4{,}8\cdot 10^{-10}\text{ ед. СГСЭ}_q)^2}{1\cdot 10^{-8}\text{ см}}\cong 23\cdot 10^{-12}\text{ эрг}.$$

Если один протон находится в покое, а другой движется, то его конечная скорость может быть найдена из соотношения (с применением закона сохранения энергии)

$$\frac{1}{2}Mv^2\cong 23\cdot 10^{-12}\text{ эрг},\qquad v^2\cong\frac{2\cdot 23\cdot 10^{-12}\text{ эрг}}{1{,}67\cdot 10^{-24}\text{ г}}\cong 27\cdot 10^{12}\,(\text{см/сек})^2,$$

откуда

$$v\cong 5\cdot 10^6\text{ см/сек}.$$

д) Протон ускоряется из состояния покоя однородным электрическим полем. Разность потенциалов, создающая поле, в котором движется протон, равна 100 *в*. Какова конечная кинетическая энергия протона? (Заметим, что 100 *в*=0,33 ед. СГСЭ_v.) Кинетическая энергия будет равна изменению потенциальной энергии $e\,\Delta\varphi$, т. е.

$$(4{,}8\cdot 10^{-10}\text{ ед. СГСЭ}_q)\cdot(0{,}33\text{ ед. СГСЭ}_v)\cong 1{,}6\cdot 10^{-10}\text{ эрг}.$$

Пример. *Электрон-вольты.* В атомной и ядерной физике удобной единицей энергии является электрон-вольт (*эв*). Один электрон-вольт равен разности потенциальных энергий заряда в двух точках, между которыми существует разность потенциалов 1 *в*. Таким образом,

$$1\text{ эв}=(4{,}8\cdot 10^{-10}\text{ ед. СГСЭ}_q)\cdot\left(\frac{1}{300}\text{ ед. СГСЭ}_v\right)=1{,}6\cdot 10^{-12}\text{ эрг}.$$

Альфа-частица (ядро He^4 или дважды ионизованный атом гелия), ускоряемая из состояния покоя разностью потенциалов 1000 *в*, обладает кинетической энергией, равной

$$2e \cdot 1000\ в = 2000\ эв,$$

где $2000\ эв = (2 \cdot 10^3) \cdot (1{,}60 \cdot 10^{-12})\ эрг = 3{,}2 \cdot 10^{-9}\ эрг$.

Мы видели, что разность $K_B - K_A$ кинетических энергий частицы для двух точек обладает тем свойством, что

$$K_B - K_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{55}$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу. Но из (44) мы знаем, что

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{55a}$$

Поэтому, складывая (55) и (55а), получаем

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = 0. \tag{56}$$

Таким образом, *сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняется постоянной, т. е. не зависящей от времени, для любой частицы.*

Переписывая (56) для системы, состоящей из одной частицы, мы получаем функцию энергии в следующем виде:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} Mv^2 (A) + U(A) = \frac{1}{2} Mv^2 (B) + U(B),} \tag{57}$$

где E — постоянная величина, называемая энергией или полной энергией системы.

Обобщим теперь формулу (57) на систему, состоящую из двух частиц, находящихся во внешнем потенциальном поле:

$$E = K + U =$$
$$= \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \text{const}. \tag{58}$$

Первый член выражает собой кинетическую энергию частицы 1, а второй — кинетическую энергию частицы 2; третий и четвертый члены представляют собой потенциальную энергию частиц 1 и 2, связанную с наличием внешнего потенциала, и, наконец, пятый член характеризует потенциальную энергию взаимодействия между частицами 1 и 2. Заметим, что член $U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ фигурирует лишь один раз: если две частицы взаимодействуют между собой, то энергия их взаимодействия представляет собой взаимную энергию!

Если частицы 1 и 2 являются протонами, находящимися в гравитационном поле Земли, то энергия E, в соответствии с (58), будет равна

$$E=\frac{1}{2}M\left(v_1^2+v_2^2\right)+Mg\left(x_1+x_2\right)-\frac{GM^2}{r_{12}}+\frac{e^2}{r_{12}}, \tag{59}$$

где x отсчитывается снизу вверх и $r_{12}=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$. Последний член выражает собой кулоновскую энергию взаимодействия двух протонов; предпоследний член выражает собой их гравитационную энергию.

Кулоновская энергия характеризует отталкивание протонов, а гравитационная — их притяжение. Отношение этих двух последних членов равно

$$\frac{GM^2}{e^2}\approx\frac{10^{-7}\cdot10^{-48}}{10^{-19}}\approx10^{-36}$$

и показывает, что гравитационные силы, действующие между протонами, исчезающе малы по сравнению с электростатическими силами.

Пример. *Линейная восстанавливающая сила.* Вычислить потенциальную энергию $U(x)$ частицы, на которую действует восстанавливающая сила $F_{\text{внутр}}=-Cx$ пружины (мы произведем это вычисление в качестве примера решения одномерной задачи).

Из соотношения (46) следует, что $F_{\text{внутр}}=-dU/dx$. После интегрирования находим

$$U(x_2)-U(x_1)=-\int_{x_1}^{x_2}F_{\text{внутр}}\,dx=C\int_{x_1}^{x_2}x\,dx=\frac{1}{2}C\left(x_2^2-x_1^2\right), \tag{60}$$

что совпадает с (28).

В этой задаче за нулевое значение потенциальной энергии удобно принять значение потенциальной энергии при $x=x_1$. Тогда

$$U=\frac{1}{2}Cx^2. \tag{61}$$

Из (57) находим, что в любой точке x полная энергия будет постоянна и равна

$$E=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}Cx^2=\text{const}. \tag{62}$$

Когда $x=0$, полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию; в конечных точках, где изменяется направление движения, скорость v обращается в нуль и полная энергия представляет собой потенциальную энергию. Поэтому, если обозначить максимальное смещение через A, то полная энергия будет равна

$$E=\frac{1}{2}CA^2. \tag{63}$$

Максимальное значение скорости может быть найдено из соотношения

$$v_{\max}^2=\frac{2E}{M}=\frac{CA^2}{M}. \tag{64}$$

П р и м е р. *Скорость, необходимая для преодоления земного притяжения (вторая космическая скорость) и для преодоления притяжения Солнца (третья космическая скорость).* Вычислим начальную скорость, необходимую для того, чтобы частица массой M покинула Землю и Солнечную систему (пренебрегая вращением Земли).

Полная энергия частицы, движущейся со скоростью v, состоит из кинетической и потенциальной энергий и равна

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{GM_З M}{R_З}, \tag{65}$$

где G — гравитационная постоянная; $M_З$ — масса Земли и $R_З \cong 6{,}4 \cdot 10^8$ *см* — радиус Земли. Гравитационная постоянная $G = 6{,}670 \cdot 10^{-8}$ *дин·см²/г²*, масса Земли $M_З = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ *г*.

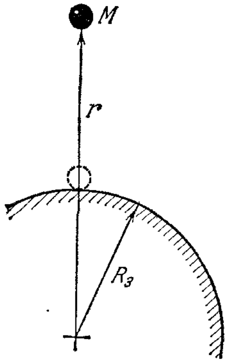

Рис. 5.26. Рассмотрим скорость, необходимую для того, чтобы масса M преодолела гравитационное поле Земли, начиная движение с ее поверхности.

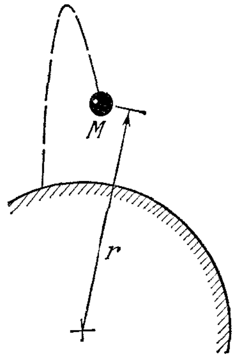

Рис. 5.27. Так выглядит траектория тела, если кинетическая энергия тела недостаточна для того, чтобы оно преодолело земное притяжение, т. е. скорость тела меньше второй космической скорости.

Для того чтобы частица удалилась от Земли на бесконечно большое расстояние и обладала бы в бесконечности наименьшей возможной скоростью, т. е. скоростью, равной нулю, полная энергия должна быть равна нулю, так как и кинетическая и потенциальная энергия сил тяжести также равна нулю. Последнее следует из того, что $U(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому в (65) E должна быть равна нулю, если полная энергия частицы сохраняет постоянное значение в любой момент времени от начала движения до бесконечности. Отсюда получается соотношение

$$\frac{1}{2} Mv_2^2 = \frac{GM_З M}{R_З},$$

из которого можно найти скорость частицы v_2, необходимую для преодоления земного притяжения (вторая космическая скорость):

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_З}{R_З}}. \tag{66}$$

Так как ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно $g=GM_З/R_З^2$, то для v_2 находим

$$v_2=\sqrt{2gR_З}\cong(2\cdot10^3\cdot6\cdot10^8)^{1/2}\approx10^6\ см/сек. \qquad (67)$$

Для того чтобы частица, вылетающая с поверхности Земли (и находящаяся на расстоянии $R_{ЗС}$ от Солнца), преодолела бы

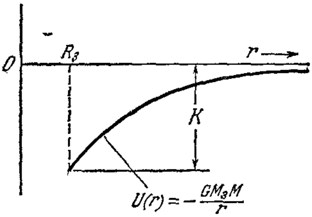

Рис. 5.28. Кинетическая энергия K, необходимая для преодоления земного притяжения, т. е. для достижения второй космической скорости. Для того чтобы достичь бесконечности, нужно, чтобы $K\geqslant-U=|U|$.

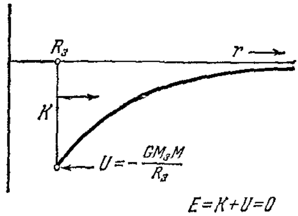

Рис. 5.29. Минимальная кинетическая энергия, необходимая для того, чтобы масса M покинула поверхность Земли (радиуса $R_З$), равна $K=\frac{1}{2}Mv_2^2=\frac{GMM_З}{R_З}$, где v_2—скорость, необходимая для преодоления земного притяжения, т. е. вторая космическая скорость.

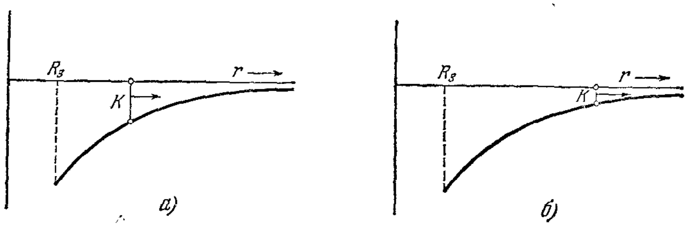

Рис. 5.30. а) Спустя некоторое время потенциальная энергия U увеличивалась, а кинетическая энергия K уменьшалась по мере удаления от центра Земли. б) Еще через некоторое время K и $|U|$ еще больше уменьшились, и при этом, конечно, $K=-U$, как и раньше.

притяжение Солнца, необходима скорость (третья космическая скорость)

$$v_С=\sqrt{\frac{2GM_С}{R_{ЗС}}}=\left[\frac{2\cdot(7\cdot10^{-8})\cdot(2\cdot10^{33})}{1,5\cdot10^{33}}\right]^{1/2}\ см/сек\approx4\cdot10^6\ см/сек, \qquad (68)$$

где $M_С=3{,}3\cdot10^5\ M_З$ и $R_{ЗС}=1{,}5\cdot10^{13}$ *см*.

Таким образом, понятно, что телам, вылетающим с Земли, покинуть Солнечную систему значительно труднее, чем покинуть Землю.

П р и м е р. *Гравитационный потенциал вблизи поверхности Земли.* Потенциальная энергия силы тяжести тела массой M на расстоянии r от центра Земли для $r>R_З$ равна

$$U(r)=-\frac{GMM_З}{r}, \qquad (69)$$

где $M_З$ — масса Земли. Если $R_З$ — радиус Земли и x — высота над поверхностью Земли, то можно показать, что

$$U \cong -MgR_З + Mgx \tag{70}$$

для $x/R_З \ll 1$. Здесь $g = GM_З/R_З^2 \cong 980$ *см/сек²*. Из (46) и (70) находим, что вблизи поверхности Земли сила притяжения равна $F_G = -dU/dx = -Mg$. Это уже знакомый нам результат.

Из (69), полагая $r = R_З + x$, мы получаем

$$U = -GMM_З \frac{1}{R_З + x}. \tag{71}$$

Выносся $R_З$ в знаменателе за скобку, находим, что

$$U = -\frac{GMM_З}{R_З} \frac{1}{1 + x/R_З}. \tag{72}$$

Теперь для $x^2 < 1$ можно воспользоваться следующим разложением в ряд:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \tag{73}$$

которое может быть получено как частный случай биномиального разложения

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \tag{74}$$

при $n = -1$. Приняв во внимание (73), мы можем переписать (72) в виде

$$U = -\frac{GMM_З}{R_З} \left(1 - \frac{x}{R_З} + \frac{x^2}{R_З^2} - \dots\right). \tag{75}$$

С помощью выражения $g = GM_З/R_З^2$, получаем

$$U = -MgR_З \left(1 - \frac{x}{R_З} + \frac{x^2}{R_З^2} - \dots\right). \tag{76}$$

Это выражение при $x \ll R_З$ переходит в (70).

В физике очень часто используется соотношение

$$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x \qquad (x \ll 1), \tag{77}$$

представляющее собой приближенную формулу (73), в которой отброшены члены высших степеней, начиная с x^2 (при этом $x^2 \ll x$). Другое, часто используемое и полезное соотношение:

$$(1+x)^n \cong 1 + nx \qquad (nx \ll 1), \tag{78}$$

которое вытекает из (74).

Наше утверждение, что

$$\text{кинетическая энергия} + \text{потенциальная энергия} = \text{const}, \tag{79}$$

выражает закон сохранения энергии, излагаемый в более общем виде в гл. 12 и описывающий также процессы, в которых какая-то часть или вся масса превращается в энергию. Подобные процессы протекают в большинстве ядерных реакций. Это обобщение представляет собой естественное следствие специальной теории относительности. Соотношение (79) выполняется даже в том случае, когда в процессе выделяется тепло, так как с микроскопической точки зрения тепло представляет собой кинетическую и потенциальную энергию атомов, электронов и молекул.

Задачи

1. *Потенциальная и кинетическая энергия падающего тела.* а) Чему равна потенциальная энергия массы в 1 *кг* на высоте 1 *км* над поверхностью Земли? Выразите эту энергию в эргах, считая, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю.

Ответ. $9{,}8 \cdot 10^{10}$ *эрг.*

б) Чему равна кинетическая энергия массы в 1 *кг*, достигшей поверхности Земли и брошенной без начальной скорости с высоты 1 *км* (трением пренебречь)?

Ответ. $9{,}8 \cdot 10^{10}$ *эрг.*

в) Чему равна кинетическая энергия такой же массы, когда она пролетает первую половину пути?

г) Чему равна потенциальная энергия на половине высоты? Сумма в) и г) должна равняться а) или б). Почему?

2. *Потенциальная энергия над Землей.* а) Чему равна потенциальная энергия $U(R_З)$ массы в 1 *кг* на поверхности Земли, если считать, что в бесконечности потенциальная энергия равна нулю (не забудьте, что $U(R_З)$ отрицательна)?

Ответ. $-6{,}23 \cdot 10^{14}$ *эрг.*

б) Чему равна потенциальная энергия массы в 1 *кг* на расстоянии 10^5 *км* от центра Земли, считая, что в бесконечности потенциальная энергия равна нулю?

Ответ. $-3{,}98 \cdot 10^{13}$ *эрг.*

в) Чему равна работа, необходимая для перемещения массы в 1 *кг* с поверхности Земли на расстояние 10^5 *км* от центра Земли?

3. *Электростатическая потенциальная энергия.* а) Чему равна электростатическая потенциальная энергия электрона и протона, находящихся на расстоянии $1\,\text{Å} = 10^{-8}$ *см* один от другого, если считать, что при бесконечном удалении друг от друга их потенциальная энергия равна нулю? Если заряд выражен в абсолютных электростатических единицах, то результат будет выражен в эргах.

Ответ. $-2{,}3 \cdot 10^{-11}$ *эрг.*

б) Какова будет электростатическая потенциальная энергия двух протонов на таком же расстоянии? Обратите особое внимание на знак ответа.

4. *Спутник на круговой орбите.* а) Чему равна центробежная сила, действующая на спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли на расстоянии r от центра Земли? Скорость спутника относительно центра Земли равна v, а его масса M.

б) Чему равна гравитационная сила, действующая на спутник?

в) Выразите v через r, приравняв гравитационную силу центробежной силе.

5. *Кинетическая энергия Луны.* Чему равна кинетическая энергия Луны относительно Земли? Необходимые данные приведены в таблице физических постоянных в приложении к этому тому.

6. *Ангармоническая пружина.* Имеется пружина, упругая сила которой изменяется по закону $F = -Dx^3$.

а) Чему равна потенциальная энергия этой пружины при растяжении ее на величину x, если при $x=0$ ее потенциальная энергия $U=0$?

Ответ: $\frac{1}{4} Dx^4$.

б) Какую нужно совершить работу, чтобы эту пружину медленно растянуть от 0 до x?

7. *Поле неконсервативной силы.* Дана сила, создающая поле,

$$\mathbf{F}=(y^2-x^2)\,\hat{\mathbf{x}}+3xy\hat{\mathbf{y}}.$$

Вычислите линейный интеграл по пути, соединяющему две точки (0, 0) и (x_0, y_0) и состоящему из двух прямолинейных отрезков: первого, ограниченного точками (0, 0) и $(x_0, 0)$, и второго, ограниченного точками $(x_0, 0)$ и (x_0, y_0). Сравните полученный результат с тем, который получится, если интегрирование провести по двум другим сторонам прямоугольника. Является ли эта сила консервативной?

8. *Сближение протонов.* Два протона, каждый из которых обладает энергией 500 *Мэв*, движутся навстречу друг другу (1 *Мэв*$=1\cdot 10^6$ *эв*). До какого расстояния сблизятся протоны, если взаимодействие между ними только электростатическое и происходит по закону e^2/r? (В действительности опыты по рассеянию показали, что область ядерного взаимодействия порядка 10^{-13} *см*, благодаря чему радиус протона следует считать равным также около 10^{-13} *см*, и поэтому поведение двух протонов с такими энергиями не может быть удовлетворительно описано, если исходить из представления об электростатическом взаимодействии.)

Ответ. $1{,}4\cdot 10^{-16}$ *см*.

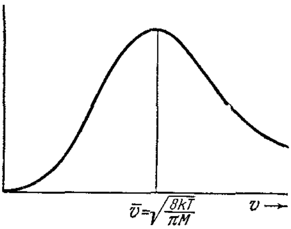

Рис. 5.31. Функция распределения скоростей молекул в газе при температуре T имеет вид $v^2e^{-Mv^2/2kT}$, где k — постоянная Больцмана.

9. *Электрон на орбите вокруг протона.* Предположим, что электрон движется вокруг протона по круговой орбите, диаметр которой равен $2\cdot 10^{-8}$ *см*.

а) Считая протон покоящимся, найти скорость электрона, приравняв центробежную силу и силу электростатического взаимодействия.

б) Чему равна кинетическая энергия? потенциальная энергия? Выразите обе энергии в эргах и электрон-вольтах.

Ответ. $K=5{,}7\cdot 10^{-12}$ *эрг*$=3{,}6$ *эв* и $U=11{,}4\cdot 10^{-12}$ *эрг*$=7{,}2$ *эв*.

в) Вычислить энергию, необходимую для ионизации системы, т. е. для удаления электрона в бесконечность, где его кинетическая энергия равнялась бы нулю. Обратите внимание на различные знаки.

10. *Вылет молекул из атмосферы.* Сравните скорость v_1, которой должна обладать молекула кислорода (O_2) для того, чтобы покинуть Землю, со средней квадратичной тепловой скоростью (v_2) той же молекулы. Эта тепловая скорость определяется из условия, что кинетическая энергия молекулы равна $^3/_2kT$; часть молекул обладает значительно большей скоростью. В выражении для кинетической энергии k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура, принимаемая равной 300° К (рис. 5.31).

Ответ: $\frac{v_1}{v_2}\cong 4\cdot 10^2$.

11. *Скорость вылета с Луны.* Используя $R_{Л}=1{,}7\cdot 10^8$ *см* и $M_{Л}=7{,}3\cdot 10^{25}$ *г*, найти

а) ускорение силы тяжести на поверхности Луны;

б) скорость, которую нужно сообщить телу, находящемуся на Луне, для того, чтобы это тело покинуло Луну.

12. *Потенциальная энергия двух пружин.* Две пружины, каждая длиной a, жесткость которых характеризуется постоянной C, закреплены в точках $(-a, 0)$ и $(+a, 0)$ и соединены между собой другими концами (рис. 5.32). Допустим, что эти пружины могут сжиматься или растягиваться в направлении их осей, не выгибаясь при этом в стороны.

а) Покажите, что потенциальная энергия системы при смещении точки соединения обеих пружин в положение, характеризуемое точкой (x, y), равна

$$U=\frac{1}{2}C\left\{[(x+a)^2+y^2]^{1/2}-a\right\}^2+\frac{1}{2}C\left\{[(a-x)^2+y^2]^{1/2}-a\right\}^2.$$

б) Потенциальная энергия в этом случае зависит от двух координат, x и y, и поэтому для того, чтобы вычислять соответствующие силы, мы должны пользоваться частными производными. Вспомним, что частная производная функции $f(x, y)$ вычисляется по обычным правилам дифференцирования, так что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx} f(x;\ y=\text{const}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy} f(x=\text{const};\ y).$$

Найдите компоненту силы F_x и покажите, что для $\mathbf{r}=0$ $F_x=0$.

в) Найдите F_y для $x=0$. Тщательно проверьте знаки, чтобы быть уверенным в том, что ответ имеет смысл.

г) Начертите график зависимости потенциальной энергии от $\mathbf{r}$ в плоскости xy и найдите положение равновесия.

13. *Взаимодействие нуклона с нуклоном.* Взаимодействие между нуклонами (протонами и нейтронами) может быть представлено с очень хорошей степенью точности потенциалом Юкавы

$$U(r) = -\left(\frac{r_0}{r}\right) U_0 e^{-r/r_0},$$

где $U_0 \approx 50$ *Мэв* и $r_0 \approx 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ *см.*

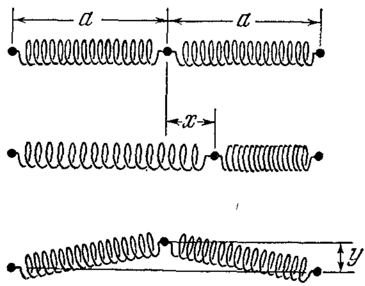

Рис. 5.32.

а) Найдите выражение для соответствующей силы $\mathbf{F}(r)$.

б) На каком приблизительно расстоянии эта сила достигнет одного процента от ее значения при $r=r_0$?

Ответ. $6 \cdot 10^{-13}$ *см.*

14. *Период обращения ионов в масс-спектрометре* *). Принцип действия масс-спектрометра основан на том, что угловая частота спирального движения в однородном магнитном поле не зависит от начальной скорости иона. На практике специальное устройство создает короткий импульс ионов и с помощью электронного приспособления измеряется время, в течение которого ионы этого импульса совершают один или большее число оборотов.

а) Покажите, что время, в течение которого ионы, обладающие зарядом e, совершают N оборотов, может быть найдено из приближенного соотношения

$$t \cong 650 \frac{NM}{B},$$

где t выражено в *микросекундах*, M — в *атомных единицах массы* и B — в *гауссах*. Отсюда период обращения ионов $T \cong t/N$.

б) Покажите, что радиус окружности приближенно может быть найден из соотношения $R \cong \frac{145\sqrt{VM}}{B}$ *см*, где V — энергия иона в электрон-вольтах.

в) Известно, что ион обладает энергией в 100 *эв* и индукция магнитного поля составляет 1000 *гс*. Вычислите время, в течение которого ион калия K^{39} совершит 6 полных оборотов (предполагается, что атом калия ионизирован однократно).

15. *Пучок электронов в осциллографе.* В осциллографической трубке электроны ускоряются разностью потенциалов φ_a и проходят между двумя электростатическими отклоняющими пластинами. Между пластинами, длина которых l и расстояние между которыми d, поддерживается разность потенциалов φ_b. Экран трубки расположен на расстоянии L от центра пластины. Воспользуйтесь

*) Имеется в виду масс-спектрометр с разделением изотопов по времени пролета. (*Прим. ред.*)

соотношением, связывающим ускоряющую разность потенциалов и скорость v: $e\Delta\varphi = \frac{1}{2}mv^2$, и

а) выведите выражение для линейного отклонения пятна на экране осциллографа.

б) Допустим, что $\varphi_a=400$ *в*, $\varphi_b=10$ *в*, $l=2$ *см*, $d=0{,}5$ *см*, $L=15$ *см*; какова будет величина отклонения D? (Не забудьте перевести вольты в единицы СГСЭ$_v$.)

Из истории физики. Открытие Цереры и Нептуна

(Этот рассказ может служить иллюстрацией точности предсказаний, основанных на классической механике.)

1. Первой открытой малой планетой была Церера, которую обнаружил визуально Пиацци из Палермо в Сицилии в первый день девятнадцатого века, т. е. 1 января 1801 г. Пиацци наблюдал ее движение в течение нескольких недель, а затем заболел и, выздоровев, потерял ее из виду. На основании немногих наблюдений Пиацци несколько ученых вычисляли орбиту Цереры, но только на основании

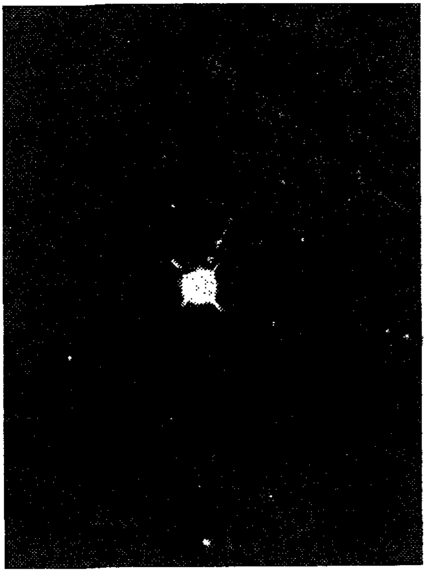

Рис. 5.33. Фотография Нептуна, снятая с помощью 120-дюймового отражательного телескопа Ликской обсерватории. Стрелкой указан Тритон, являющийся спутником Нептуна. (*Фото Ликской обсерватории*)

результатов расчета, сделанного Гауссом, удалось с достаточной точностью предсказать местоположение этой малой планеты в следующем году. И вот 1 января 1802 г. планета Церера была вновь «открыта» Олберсом, обнаружившим ее в предсказанном положении с отклонением только в 30 угловых минут. По мере накопления большего числа наблюдений Гаусс и другие смогли уточнить характеристики вычисленной орбиты, и уже в 1830 г. ошибка в определении вычисленного положения составляла всего лишь 8 угловых секунд. Учитывая возмущения, которые вносит Юпитер в движение Цереры по ее орбите, Энке смог уменьшить ошибку в определении положения Цереры в среднем до 6 угловых секунд за год. Позднейшие вычисления, в которых учет возмущений производился с большей точностью,