ГЛАВА 6

СОХРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

6.1. Сохранение импульса

В гл. 3 мы рассмотрели системы, для которых выполняется преобразование Галилея, и показали, что сохранение импульса взаимодействующих частиц является необходимым следствием этого преобразования, а также закона сохранения энергии при условии, что на систему не действуют внешние силы. Закон сохранения импульса, очень точно подтверждаемый на опыте, является существенной частью того «классического багажа», который мы уже рассматривали раньше. В этой главе мы узнаем, что такое центр масс, и рассмотрим процессы столкновения в системе отсчета, в которой центр масс находится в состоянии покоя.

Получим прежде всего выражение потенциальной энергии системы, для которой выполняется преобразование Галилея. Предположим, что система состоит из двух частиц и мы рассматриваем одномерный случай. Пусть координаты этих частиц будут x_1 и x_2. Тогда потенциальная энергия $U(x_1, x_2)$ будет зависеть только от положения этих частиц. При осуществлении преобразования Галилея потенциальная энергия не должна изменяться, т. е. должна быть инвариантной по отношению к этому преобразованию при трансляции каждой из частиц на величину b с постоянной скоростью:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + b, x_2 + b). \tag{1}$$

Какой смысл имеет это соотношение? Физически это означает, что потенциальная энергия системы не изменяется при перемещении обеих частиц из первоначального положения в какое-то новое положение и при этом не совершается никакой работы. Математически это означает, что величина b исчезает из правой части соотношения (1).

Например, если

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2, \tag{2}$$

то

$$U(x_1 + b, x_2 + b) = (x_1 + b - x_2 - b)^2 = (x_1 - x_2)^2 = U(x_1, x_2), \tag{3}$$

т. е. в правой части (1) величина b действительно уничтожается. Поэтому выражение (2) инвариантно, т. е. не изменяет своего значения при смещении частиц на величину b. В общем случае, когда $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является функцией только $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, эта функция оказывается инвариантной по отношению к сдвигу или переносу. Отметим, что если, например, $U=x_1$, то в этом случае U не инвариантно по отношению к переносу на величину b, так как при этом $U=x_1+b$, и закон сохранения импульса не выполняется.

Мы знаем, что для случая одного измерения сила равна взятой с обратным знаком производной $\partial U/\partial x$. Поэтому силы, действующие на частицы 1 и 2, равны

$$F_1=-\frac{\partial U}{\partial x_1},$$
$$F_2=-\frac{\partial U}{\partial x_2}. \tag{4}$$

При вычислении $\partial U/\partial x_1$ мы полагаем x_2 постоянным и точно так же при вычислении $\partial U/\partial x_2$ мы считаем постоянным x_1. Если U представляет собой функцию от u, где

$$u=x_1-x_2, \tag{5}$$

то по правилам дифференцирования

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_1}&=\frac{dU}{du}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{dU}{du},\\ \frac{\partial U}{\partial x_2}&=\frac{dU}{du}\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{dU}{du},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=-\frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \text{или} \quad F_1=-F_2, \tag{7}$$

как и следовало ожидать. Отсюда видно, что результирующая сила F_1+F_2, действующая на две частицы, которые взаимодействуют только друг с другом, равна нулю. Если результирующая сила равна нулю, то по закону Ньютона суммарный импульс будет постоянным.

Это рассуждение легко обобщить на случай N частиц. Потенциальная энергия системы, состоящей из N частиц, будет инвариантна по отношению к переносу, если эту энергию можно представить как функцию только расстояний между частицами:

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3, \quad \ldots, \quad \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_N, \quad \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3, \quad \ldots, \quad \mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N.$$

Кулоновское и гравитационное взаимодействия могут быть записаны именно в такой форме.

Следует подчеркнуть, что с и л а может быть инвариантна по отношению к трансляции и без того, чтобы сохранялся постоянным импульс. Важно, чтобы инвариантной была потенциальная энергия. Импульс сохраняется постоянным только в том случае, когда потенциальная энергия инвариантна по отношению к трансляции.

Центр масс. Положение центра масс (ц. м.) системы, состоящей из N частиц, относительно фиксированного начала координат O определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}_{\text{ц.м}}$, который дается соотношением

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n M_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n}. \tag{8}$$

Для системы, состоящей из двух частиц (рис. 6.1 и 6.2),

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{\mathbf{r}_1 M_1 + \mathbf{r}_2 M_2}{M_1 + M_2}. \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по времени, получаем

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц.м}} = \frac{\sum_n \dot{\mathbf{r}}_n M_n}{\sum_n M_n} = \frac{\sum_n \mathbf{v}_n M_n}{\sum_n M_n}. \tag{10}$$

Здесь сумма $\sum_n \mathbf{v}_n M_n$ представляет собой полный импульс системы. В отсутствие внешних сил полный импульс постоянен, и поэтому

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м}} = \text{const}. \tag{11}$$

Это соотношение выражает замечательное свойство центра масс: *скорость центра масс постоянна в отсутствие внешних сил* (рис. 6.3). Это справедливо, например, для радиоактивных ядер, распадающихся на лету (рис. 6.4).

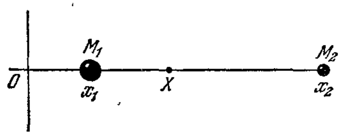


Рис. 6.1. Две массы M_1 и M_2, расположенные на оси x в точках с координатами x_1 и x_2, обладают центром масс, расположенным в точке с координатой $X = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$.

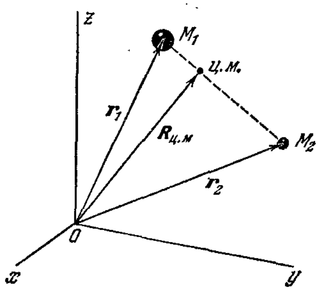


Рис. 6.2. Для двух масс M_1 и M_2, положение которых определяется векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, положение центра масс (ц. м) определяется вектором $\mathbf{R}_{\text{ц.м}}$, равным

$$\mathbf{R}_{\text{ц.м}} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}.$$

Легко показать из (10), что ускорение центра масс определяется результирующей внешней силой, действующей на систему частиц. Если $\mathbf{F}_n$— сила, действующая на n-ю частицу, то, дифференцируя

(10) по времени, мы получаем, что

$$\left(\sum_n M_n\right)\ddot{\mathbf{R}}_{\text{ц. м}}=\sum_n (M_n\dot{\mathbf{v}}_n)=\sum_n \mathbf{F}_n=\mathbf{F}_{\text{внешн}}, \qquad (12)$$

где справа в сумме $\sum_n \mathbf{F}_n$ выпадают все внутренние силы (ньютоновские), действующие между любыми двумя частицами.

Мы напоминаем, что в случае ньютоновских сил сила, действующая на i-ю частицу со стороны j-й частицы, равна и противоположна силе, действующей на j-ю частицу со стороны i-й частицы.

Приведем теперь примеры решения нескольких важных задач на столкновение, иллюстрирующие применение понятия центра масс.

Рис. 6.3. В отсутствие внешних сил скорость центра масс постоянна. Здесь подразумевается радиоактивное ядро, обладающее скоростью $\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц.м}}$ перед распадом.

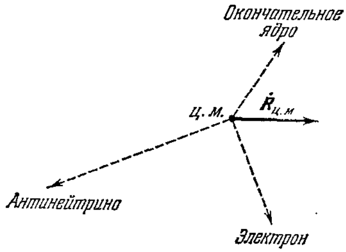


Рис. 6.4. Ядро распадается на три частицы, разлетающиеся по разным направлениям. Однако скорость центра масс этих трех частиц остается неизменной.

П р и м е р. *Столкновение слипающихся частиц.* Рассмотрим столкновение двух частиц массой M_1 и M_2, которые слипаются *при столкновении* (рис. 6.5—6.8). Пусть частица массой M_2 перед столкновением находится в начале координат и покоится. Пусть, кроме того, радиус-вектор $\mathbf{r}_1=v_1t\hat{\mathbf{x}}$ описывает движение частицы M_1 перед столкновением.

а) Рассмотрим движение массы $M=M_1+M_2$ после столкновения. Независимо от того, будет ли столкновение упругим или неупругим, полный импульс при столкновении не изменится. Будем считать рассматриваемое здесь столкновение неупругим. Начальная компонента импульса равна M_1v_1; конечная компонента импульса будет равна $(M_1+M_2)v$. Другие компоненты импульса равны нулю. Из закона сохранения импульса следует, что

$$M_1v_1=(M_1+M_2)v. \qquad (13)$$

Отсюда для скорости после столкновения находим

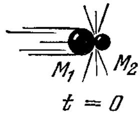
$$v=\frac{M_1}{M_1+M_2}v_1. \qquad (14)$$

Так как обе частицы слиплись между собой, то радиус-вектор

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}}=vt\hat{\mathbf{x}} \qquad (t>0) \qquad (15)$$

описывает движение системы после столкновения. В соответствии с (11) это же соотношение должно описывать движение центра масс все время как до, так и после столкновения; из (13) получаем

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = vt\hat{\mathbf{x}} = \frac{M_1}{M_1+M_2} v_1 t\hat{\mathbf{x}}. \qquad (16)$$



б) Чему равно отношение кинетической энергии K_2 после

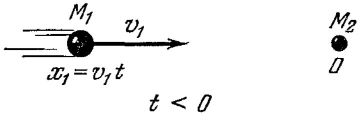


Рис. 6.5. Даже при неупругом столкновении импульс должен сохраняться. Рассмотрим столкновение, при котором частицы соединяются вместе. Перед столкновением $p_x=M_1v_1$.

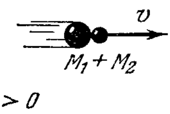


Рис. 6.6. После столкновения $p_x=M_1v_1=(M_1+M_2)v$, так что

$$v=\frac{M_1v_1}{M_1+M_2}<v_1.$$

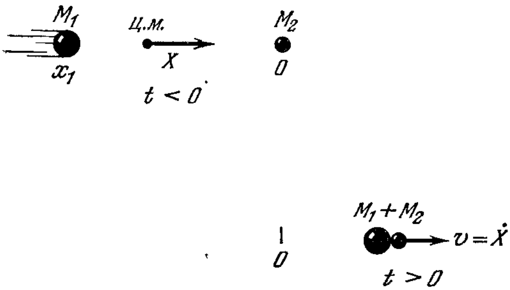


Рис. 6.7. Скорость $\dot{X}$ не изменяется при столкновении.

$$X=\frac{M_1x_1+M_2x_2}{M_1+M_2},$$

$$\dot{X}=\frac{M_1v_1}{M_1+M_2}.$$

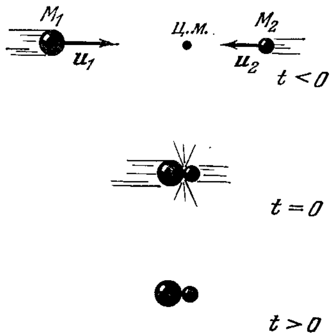


Рис. 6.8. Если в системе отсчета, начало которой совпадает с центром масс, скорости масс M_1 и M_2 до столкновения равны $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, то после столкновения массы (M_1+M_2) будут находиться в состоянии покоя.

столкновения к начальной кинетической энергии K_1? Кинетическая энергия K_2 после столкновения равна

$$K_2=\frac{1}{2}(M_1+M_2)\frac{M_1^2}{(M_1+M_2)^2}v_1^2=\frac{M_1^2v_1^2}{2(M_1+M_2)}. \qquad (17)$$

Так как начальная кинетическая энергия равна $K_1={}^1/_2M_1v_1^2$, то отношение K_2/K_1 будет равно

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{M_1}{M_1+M_2}. \qquad (17a)$$

Уменьшение энергии при столкновении расходуется на увеличение внутренней энергии составной системы после столкновения. Когда летящий метеорит сталкивается с Землей и остается на ней, значительная часть его энергии переходит в тепло, так как $M_1 \ll M_1+M_2$.

в) Опишем движение до и после столкновения в системе отсчета, в которой центр масс покоится (такая система отсчета называется системой центра масс).

Положение центра масс системы определяется, как это следует из (9), радиусом-вектором

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{M_1 v_1 t \hat{\mathbf{x}}}{M_1 + M_2}. \tag{18а}$$

Скорость центра масс равна

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}. \tag{18б}$$

В системе отсчета, связанной с центром масс, начальная скорость $\mathbf{u}_1$ частицы 1 выразится следующим образом:

$$\mathbf{u}_1 = v_1\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{V} = \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) v_1 \hat{\mathbf{x}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}. \tag{18в}$$

В той же системе отсчета начальная скорость частицы 2 будет равна

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{V} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}. \tag{18г}$$

После столкновения частицы слипаются, и новая составная частица обладает массой M_1+M_2. Эта частица должна покоиться в системе координат, связанной с центром масс. Относительно лабораторной системы отсчета новая частица обладает скоростью $\mathbf{V}$, которая может быть найдена из соотношения (18б), в точности совпадающего с выражением (14), полученным ранее.

П р и м е р. *Поперечные компоненты импульса.* Две частицы одинаковой массы вначале движутся по пути, параллельному оси x, и сталкиваются между собой. После столкновения одна из частиц приобретает компоненту скорости $v_y(1)$ по оси y. Чему будет равна компонента скорости по оси y у другой частицы после столкновения? Напомним, что для каждой компоненты x, y, z полного импульса в отдельности выполняется закон сохранения.

Перед столкновением частицы двигались вдоль оси x так, что полная y-я компонента импульса равнялась нулю. По закону сохранения импульса полная y-я компонента импульса после столкновения также должна быть равна нулю, так что

$$M[v_y(1) + v_y(2)] = 0, \tag{19}$$

откуда

$$v_y(2) = -v_y(1). \tag{20}$$

Однако значение $v_y(1)$ не может быть вычислено, если неизвестны начальные траектории и некоторые детали, относящиеся к силам, действующим при столкновении.

П р и м е р. *Столкновение возбужденных частиц.* Представим себе, что сталкиваются две частицы одинаковой массы и обладающие равными, но противоположными по направлению скоростями $\pm v_1$. Чему будут равны скорости после столкновения? Центр масс покоится и должен оставаться в состоянии покоя, так что конечные скорости $\pm \mathbf{v}_2$ должны быть равны по величине, но противоположны по направлению. Если столкновение упругое, то, как этого требует закон сохранения энергии, конечная скорость v_2 должна быть равна по величине и противоположна по направлению начальной скорости v_1. Если же в результате столкновения одна или обе частицы приходят в возбужденное состояние, то из закона сохранения энергии следует, что в этом случае $v_2 < v_1$. Если же одна или обе частицы первоначально уже находились в возбужденном состоянии за счет каких-то внутренних процессов, то после столкновения энергия их возбужденного состояния переходит в кинетическую энергию, и тогда v_2 будет больше, чем v_1.

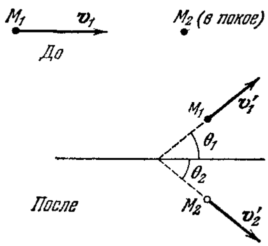


Рис. 6.9. Столкновение между M_1 и M_2 не ограничивается одним измерением. В лабораторной системе отсчета M_2 до столкновения находится в покое.

П р и м е р. *Отклонение тяжелых частиц легкими.* Это хорошо известная задача. Частица массы M_1 упруго сталкивается с частицей массы M_2, первоначально находившейся в покое относительно лабораторной системы отсчета (рис. 6.9). При столкновении траектория M_1 отклоняется на угол θ_1. Максимальное возможное значение угла рассеяния θ_2 определяется по законам сохранения энергии и импульса, независимо от деталей взаимодействия между частицами. Наша задача состоит в том, чтобы найти значение θ_{1max}. На окончательной стадии расчета мы убедимся в том, что столкновение удобно рассматривать в такой системе отсчета, в которой центр масс покоится.

Обозначим начальные скорости в лабораторной системе отсчета через

$$\mathbf{v}_1 = v_1\hat{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{v}_2 = 0, \tag{21}$$

а конечные скорости (после столкновения) через $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$. Закон сохранения энергии требует, чтобы при упругом столкновении полная кинетическая энергия до столкновения равнялась полной кинетической энергии после столкновения, т. е.

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 \tag{22}$$

при начальном условии $v_2 = 0$. Закон сохранения импульса для

x-й компоненты импульса требует, чтобы

$$M_1 v_1 = M_1 v_1' \cos\theta_1 + M_2 v_2' \cos\theta_2. \qquad (23)$$

Вся картина столкновения может рассматриваться как происходящая в плоскости xy, так как в столкновении принимают участие только две частицы. Закон сохранения импульса для y-й компоненты импульса требует, чтобы

$$0 = M_1 v_1' \sin\theta_1 + M_2 v_2' \sin\theta_2, \qquad (24)$$

так как первоначально y-я компонента импульса была равна нулю.

Вполне возможно, но довольно утомительно решить совместно уравнения (22)—(24) и найти интересующие нас величины. Эти уравнения выражают собой содержание законов сохранения. Однако значительно удобней и более содержательно рассматривать столкновение в системе отсчета, связанной с центром масс. Прежде всего найдем скорость центра масс относительно лабораторной системы отсчета. Положение центра масс определяется соотношением

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}. \qquad (25)$$

Скорость $\mathbf{V}$ центра масс равна

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{ц.м}} = \frac{M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + M_2\dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}, \qquad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\mathbf{v}_1, \qquad (26)$$

где результат мы выразили через скорость $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ с учетом того, что перед столкновением $\mathbf{v}_2 = 0$. Заметим, что (26) выражает собой то же самое, что и уравнение (18в), но написано оно теперь для трех измерений.

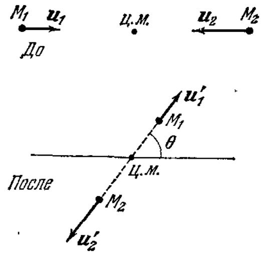


Рис. 6.10. В системе отсчета, связанной с центром масс, массы M_1 и M_2 после столкновения должны разлетаться в противоположных направлениях. Возможны все углы $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $|\mathbf{u}_1'| = |\mathbf{u}_1|$, а $|\mathbf{u}_2'| = |\mathbf{u}_2|$.

Обозначим начальные скорости в системе отсчета, в которой центр масс покоится, через $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$; конечные скорости в этой же системе отсчета пусть будут равны $\mathbf{u}_1'$ и $\mathbf{u}_2'$ (рис. 6.10). Между скоростями в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета, связанной с центром масс, существуют следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V}, \quad & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \mathbf{V}, \\ \mathbf{v}_1' &= \mathbf{u}_1' + \mathbf{V}, \quad & \mathbf{v}_2' &= \mathbf{u}_2' + \mathbf{V}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Мы можем высказать предположение о типе решения, допускаемого законами сохранения. Отметим прежде всего, что при любом столкновении, для которого скорости

$$u_1 = u_1' \quad \text{и} \quad u_2 = u_2', \qquad (28)$$

будет выполняться закон сохранения энергии, так как кинетическая энергия каждой частицы не изменилась. Далее, в системе отсчета, связанной с центром масс, импульс также будет сохраняться, если угол рассеяния частицы 1 равен углу рассеяния частицы 2, т. е. траектории обеих частиц коллинеарны. Если бы эти углы рассеяния (отсчитываемые в системе отсчета, связанной с центром масс) были не равны друг другу, то центр масс после столкновения не мог бы оставаться в покое. Однако мы знаем, что центр масс остается в покое, если не действуют внешние силы.

В системе отсчета, связанной с центром масс, кинематика столкновения очень проста. Законами сохранения допускаются все значения угла рассеяния $\theta_{ц.м}$. Это не выполняется для углов θ_1 и θ_2

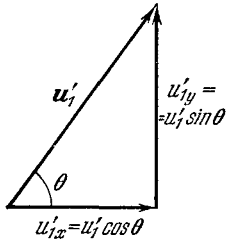


Рис. 6.11. Конечная скорость $\mathbf{u}_1'$ в системе отсчета, связанной с центром масс, разлагается на компоненты x и y по осям координат.

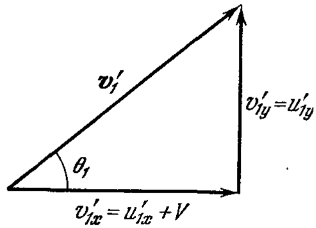


Рис. 6.12. В лабораторной системе отсчета x- и y-компоненты $\mathbf{v}_1'$ изображены на чертеже. Очевидно, что $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + V/u_1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + M_1/M_2}$.

в лабораторной системе отсчета; рассмотрим случай столкновения тяжелой частицы с фотоном, первоначально находившимся в покое. Из интуитивных соображений ясно, что тяжелая частица не отскочит в обратном направлении в результате столкновения. Какие при этом существуют ограничения?

Вернемся к лабораторной системе отсчета. Мы можем написать, обозначая для удобства $\theta_{ц.м}$ просто буквой θ, что

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{v_1'\sin\theta_1}{v_1'\cos\theta_1} = \frac{u_1'\sin\theta}{u_1'\cos\theta + V}, \tag{29}$$

где мы использовали тот факт, что y-компонента конечной скорости частицы 1 одна и та же в обеих системах отсчета. Далее, приняв во внимание (28) и полагая $u_1 = u_1'$, находим, что

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + V/u_1}. \tag{30}$$

Из (26) и (27) получается следующее соотношение:

$$\mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{V}), \qquad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_2}\mathbf{u}_1, \tag{31}$$

подставляя которое в (30) находим

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + M_1/M_2}. \tag{32}$$

Нам нужно найти значение θ_{1max}. Это может быть сделано графически по графику функции (32) или с использованием дифференциального исчисления для определения максимума $tg\,\theta_1$ как функции θ. Как показывает анализ, при $M_1 > M_2$ знаменатель никогда не может обратиться в нуль, и в этом случае θ_{1max} должен быть

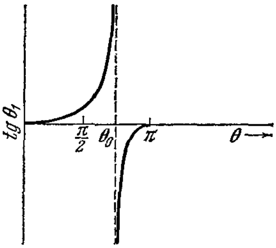


Рис. 6.13. При $M_1 < M_2$ $tg\,\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + M_1/M_2}$ обращается в бесконечность при $\theta = \arccos(-M_1/M_2)$. Возможны все углы $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$.

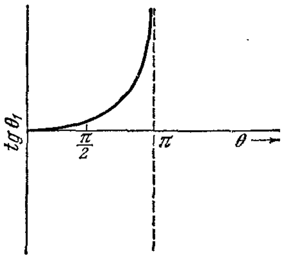


Рис. 6.14. При $M_1 = M_2$ $tg\,\theta_1$ обращается в бесконечность при $\theta = \pi$. Поэтому возможны все углы $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi/2$, являющиеся корнями уравнения для $tg\,\theta_1$.

меньше, чем $\pi/2$. Если $M_1 = M_2$, то $\theta_{1max} = \pi/2$ (рис. 6.13—6.15). Если $M_1 < M_2$, то θ_1 может иметь любое значение.

Пример. *Задача о спутнике.* Спутник мчится в пространстве, свободном от действия сил, наподобие межпланетного осколка, и изменение его массы пропорционально скорости, т. е. $dM/dt = \alpha v$, где M — масса и v — скорость спутника, α — постоянная величина. Чему будет равно его замедление?

Из второго закона Ньютона находим, что

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \dot{M}\mathbf{v} + M\dot{\mathbf{v}} = 0 \qquad (33)$$

или, в случае движения в одном измерении, при $\dot{M} = \alpha v$

$$\dot{v} = -\frac{\alpha v^2}{M}. \qquad (34)$$

(Это написано для $v \geqslant 0$.) Существует ли другой путь решения этой задачи?

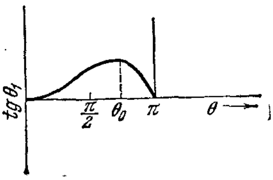


Рис. 6.15. При $M_1 > M_2$ $tg\,\theta_1$ не обращается в бесконечность. Поэтому $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \arcsin(M_2/M_1) < \pi/2$.

Пример. *Задача о космическом корабле.* Космический корабль выбрасывает топливо со скоростью $-\mathbf{V}_0$ относительно корабля; скорость изменения массы корабля $\dot{M} = -\alpha$ постоянна. Составим и решим уравнение движения космического корабля, пренебрегая силой тяжести.

Пусть скорость корабля в момент времени t равна $\mathbf{v}$. Скорость истечения топлива в лабораторной (но не относительно корабля) системе отсчета (инерциальная система) равна $-\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}$. Мы считаем, что $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{v}$ параллельны, и поэтому задача сводится к задаче в одном измерении.

Сила, действующая на спутник и возникающая при выбрасывании топлива, равна и противоположна по знаку импульсу выбрасываемого топлива, отнесенному к единице времени. В лабораторной системе отсчета импульс выбрасываемого топлива, отнесенный к единице времени, равен $|\dot{M}|\,(-V_0+v)$, или $\alpha(-V_0+v)$, и поэтому сила, действующая на спутник, в этой системе отсчета равна

$$F = -\alpha(-V_0+v) = \alpha(V_0-v). \tag{35}$$

Для спутника эта сила равна $\dot{M}v+M\dot{v}$; поэтому уравнение движения имеет вид *)

$$\dot{M}v+M\dot{v} = \alpha(V_0-v), \tag{36}$$

откуда

$$M\dot{v} = \alpha V_0. \tag{37}$$

Здесь

$$M(t) = M_0-\alpha t. \tag{38}$$

Последнее уравнение предполагает, что выполняется условие $\dot{M}=-\alpha$.) Из (36) следует, что

$$-\alpha v+(M_0-\alpha t)\frac{dv}{dt} = \alpha(V_0-v). \tag{39}$$

После преобразования находим отсюда, что

$$dv = \frac{(\alpha V_0/M_0)}{1-(\alpha t/M_0)}\,dt. \tag{39a}$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $t=0$ до t и от v_0 до v, находим, что

$$v = -V_0\ln\left(1-\frac{\alpha t}{M_0}\right)+v_0, \tag{40}$$

где v_0 — начальная скорость корабля.

Таким образом, изменение скорости за время t равно

$$v-v_0 = -V_0\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right) = V_0\ln\frac{t_0}{t_0-t}, \tag{41}$$

где

$$t_0 \equiv \frac{M_0}{\alpha} \tag{42}$$

представляет собой экстраполированное время, в течение которого была бы выброшена вся масса корабля. Конечно, корабль не состоит только из одного топлива; двигатель отключается в тот момент, когда время его работы составляет что-нибудь около 85—90% от t_0. Поэтому 85—90% первоначальной массы корабля должно составлять топливо. Из формулы (41) следует, что выгодно применять горючее, обладающее способностью выбрасываться с большой скоростью (больше V_0).

*) Уравнение движения переменной массы впервые было получено И. В. Мещерским («Динамика точки переменной массы», Петербург, 1897). (*Прим. ред.*)

Наиболее эффективным из всех возможных горючих были бы фотоны, для которых $V_0 = c$. Представьте уравнение (41) в безразмерной форме, используя в качестве переменных $(v - v_0)/V_0$ и t/t_0, и постройте соответствующий график. Какого типа бумагу (т. е. с какой сеткой) лучше всего применять для построения такого графика?

6.2. Сохранение момента импульса

Момент импульса **J** отдельной частицы (рис. 6.16, *а* и *б*) относительно произвольно выбранной фиксированной точки (фиксированной в инерциальной системе отсчета) первоначально определяется соотношением

$$\boxed{\mathbf{J} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv \mathbf{r} \times M\mathbf{v},} \tag{43}$$

где **p** — импульс. Момент импульса измеряется в *г·см²/сек* или в *эрг·сек*. Компоненту **J** вдоль любой линии (или оси), проходящей

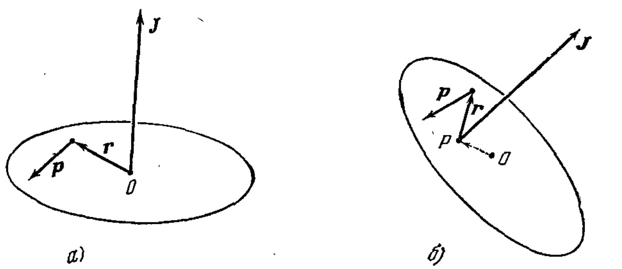


Рис. 6.16. *а*) Момент импульса *относительно точки O* определяется этим чертежом: $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. *б*) Момент импульса *относительно другой точки P* будет уже другим, даже для той же самой частицы *с одним и тем же* импульсом: $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

через фиксированную точку отсчета, часто называют моментом импульса частицы относительно этой оси.

Мы определяем момент вращения (или вращательный момент) относительно такой фиксированной точки, когда

$$\boxed{\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F},} \tag{44}$$

где **F** — сила, действующая на частицу. Момент вращения измеряется в *дин·см*. Дифференцируя (43), получаем

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{45}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times M\mathbf{v} = 0, \tag{46}$$