Наиболее эффективным из всех возможных горючих были бы фотоны, для которых $V_0=c$. Представьте уравнение (41) в безразмерной форме, используя в качестве переменных $(v-v_0)/V_0$ и t/t_0, и постройте соответствующий график. Какого типа бумагу (т. е. с какой сеткой) лучше всего применять для построения такого графика?

6.2. Сохранение момента импульса

Момент импульса **J** отдельной частицы (рис. 6.16, *а* и *б*) относительно произвольно выбранной фиксированной точки (фиксированной в инерциальной системе отсчета) первоначально определяется соотношением

$$\boxed{\mathbf{J}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}\equiv\mathbf{r}\times M\mathbf{v},} \tag{43}$$

где **p** — импульс. Момент импульса измеряется в *г·см²/сек* или в *эрг·сек*. Компоненту **J** вдоль любой линии (или оси), проходящей

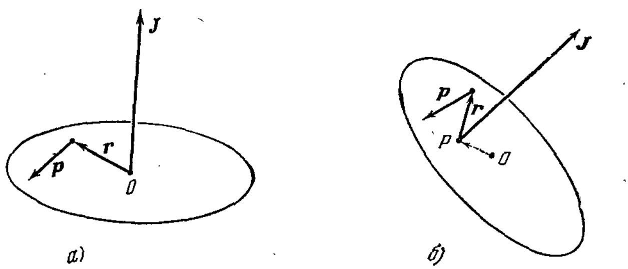

Рис. 6.16. *а*) Момент импульса *относительно точки О* определяется этим чертежом: $\mathbf{J}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$. *б*) Момент импульса *относительно другой точки P* будет уже другим, даже для той же самой частицы *с одним и тем же* импульсом: $\mathbf{J}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$.

через фиксированную точку отсчета, часто называют моментом импульса частицы относительно этой оси.

Мы определяем момент вращения (или вращательный момент) относительно такой фиксированной точки, когда

$$\boxed{\mathbf{N}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{F},} \tag{44}$$

где **F** — сила, действующая на частицу. Момент вращения измеряется в *дин·см*. Дифференцируя (43), получаем

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{45}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}=\mathbf{v}\times M\mathbf{v}=0, \tag{46}$$

а также второй закон Ньютона для инерциальной системы отсчета, получаем

$$\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{N}. \tag{47}$$

Таким образом, мы приходим к важному выводу:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt}=\mathbf{N};} \tag{48}$$

скорость изменения момента импульса равна моменту вращения.

Если $\mathbf{N}=0$, то $\mathbf{J}=\mathrm{const}$. *Момент импульса постоянен в отсутствие внешних моментов вращения* *); это утверждение составляет содержание закона сохранения момента импульса. Следует

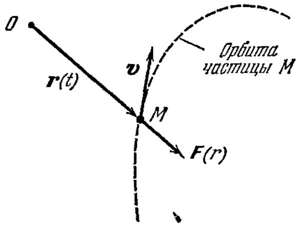

Рис. 6.17. На частицу M действует отталкивающая центральная сила $\mathbf{F}(r)$, исходящая из точки O. В этом случае момент силы $\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0$, и мы получаем $\mathbf{J}=\mathrm{const}$.

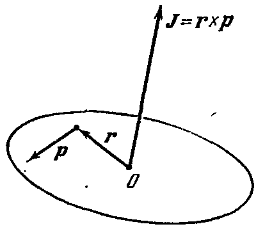

Рис. 6.18. Так как при центральном движении вектор $\mathbf{J}$ постоянен, то такое движение происходит в одной плоскости.

заметить, что закон сохранения момента импульса справедлив не только для частиц, движущихся по замкнутым орбитам. Он выполняется также и для незамкнутых орбит, а также в процессах столкновения (рис. 6.17, 6.18).

Рассмотрим частицу, на которую действует центральная сила, имеющая вид

$$\mathbf{F}=\hat{\mathbf{r}}f(r). \tag{49}$$

Центральная сила представляет собой силу, всегда направленную точно к некоторой определенной точке (или от нее). В этом случае момент вращения равен

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{r}}f(r)=0, \tag{50}$$

поэтому для центральных сил

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}=0 \tag{51}$$

и *момент импульса сохраняется постоянным*. В следующем разделе

*) Внешний момент вращения создается внешней силой, действующей на тело. Внутренний момент вращения связан с силой, действующей со стороны одной части тела на другую.

будет показано, что этот результат может быть получен как следствие инвариантности функции потенциальной энергии $U(\mathbf{r})$ при повороте системы отсчета. Однако сначала мы рассмотрим обобщенные уравнения момента вращения для случая N взаимодействующих частиц.

Суммарный момент импульса системы частиц относительно произвольно выбранной точки в инерциальной системе отсчета будет равен

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^{N} M_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n. \tag{52}$$

Так же как и для одной частицы, значение $\mathbf{J}$ зависит от положения точки, выбранной за начало отсчета. Если $\mathbf{R}_{\text{ц.м}}$ представляет собой вектор, характеризующий положение центра масс относительно начала системы отсчета, мы можем записать выражение для $\mathbf{J}$ в следующем удобном виде:

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^{N} M_n (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_{\text{ц.м}}) \times \mathbf{v}_n + \sum_{n=1}^{N} M_n \mathbf{R}_{\text{ц.м}} \times \mathbf{v}_n = \mathbf{J}_{\text{ц.м}} + \mathbf{R}_{\text{ц.м}} \times \mathbf{P}, \tag{53}$$

где $\mathbf{J}_{\text{ц.м}}$ — момент импульса *относительно* центра масс и $\mathbf{P} = \sum M_n \mathbf{v}_n$ — полный импульс. Соотношение (53) имеет важное значение. Член $\mathbf{R}_{\text{ц.м}} \times \mathbf{P}$ выражает собой момент импульса центра масс относительно начала отсчета. Этот член зависит от выбора начала системы отсчета; член $\mathbf{J}_{\text{ц.м}}$, наоборот, не зависит от выбора начала системы отсчета. Для одной частицы иногда полезно называть величину $\mathbf{J}_{\text{ц.м}}$ *спином* момента импульса.

Пример. *Момент вращения внутренних сил.* В результате взаимодействия между самими частицами возникают моменты внутренних сил. Покажем, что *сумма всех моментов внутренних сил равна нулю.* Полный момент вращения всех сил равен

$$\mathbf{N} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n, \tag{54}$$

где сумма внутренних сил

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N}{}' \mathbf{F}_{ij} \tag{55}$$

представляет собой сумму сил, действующих на частицу i со стороны всех других частиц j (штрих при $\sum$ означает, что при суммировании член со значком $j=i$ исключается). Момент вращения внутренних сил равен

$$\mathbf{N}_{\text{внутр}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \sum_j{}' \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}. \tag{56}$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_i \sum_j{}' \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \equiv \sum_j \sum_i{}' \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}, \tag{57}$$

мы можем представить $\mathbf{N}_{внутр}$ в следующем виде:

$$\mathbf{N}_{внутр}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j{}'(\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{r}_j\times\mathbf{F}_{ji}). \tag{58}$$

Предположим теперь, что все силы являются ньютоновскими, т. е. что можно положить $\mathbf{F}_{ji}=-\mathbf{F}_{ij}$, тогда

$$\mathbf{N}_{внутр}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j{}'(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\times\mathbf{F}_{ij}. \tag{59}$$

Для центральных сил $\mathbf{F}_{ij}$ параллельны $\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$. Отсюда сразу же следует, что

$$(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\times\mathbf{F}_{ij}=0,$$

и поэтому

$$\mathbf{N}_{внутр}=0. \tag{60}$$

(Точно такой же результат может быть получен и для нецентральных внутренних сил. Статические нецентральные силы, играющие важную роль в физике, в большинстве случаев могут возникать из сил, действующих в пространственном множестве частиц, каждая из которых является источником центральной силы.)

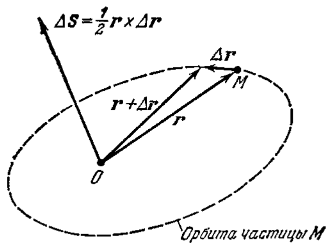

Рис. 6.19.

Полагая, что $F_{внутр}=0$, мы получаем из (51), (53) и (60)

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\mathbf{J}_{общ}=\mathbf{N}_{внешн}; &(61)\\ &\mathbf{J}_{общ}=\mathbf{J}_{ц.м}+\mathbf{R}_{ц.м}\times\mathbf{P}. &(62)\end{aligned}}$$

Здесь $\mathbf{J}_{ц.м}$ — момент импульса относительно центра масс, а $\mathbf{R}_{ц.м}\times\mathbf{P}$ — момент импульса центра масс относительно произвольно выбранного начала отсчета. Во многих случаях очень удобно за начало отсчета выбирать центр масс. Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}_{ц.м}=\mathbf{N}_{внешн}. \tag{63}$$

Мы видели, что движение центра масс определяется результирующей внешней силой, действующей на тело. Теперь мы видим, что вращение относительно центра масс определяется результирующим моментом внешних сил.

Геометрический смысл момента импульса частицы, движущейся по орбите, внутри которой находится начало отсчета, ясен из рис. 6.19. Вектор площади $\Delta\mathbf{S}$ треугольника выражается соотношением

$$\Delta\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}. \tag{64}$$

Отсюда

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}}=\frac{1}{2M}\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\frac{1}{2M}\mathbf{J}. \qquad (65)$$

Мы видели, что при соответствующем выборе начала отсчета $\mathbf{J}=\text{const}$ для центральных сил.

Если в задаче, связанной с движением планет, начало отсчета помещено в точке, совпадающей с Солнцем, то момент импульса сохраняется постоянным вдали от возмущений, вызванных другими планетами. Для центральных сил из (64) и (65) мы приходим к следующим выводам:

1) орбита расположена в плоскости;

2) секториальная скорость *) сохраняется постоянной — это один из трех законов Кеплера (рассматриваемых в гл. 9).

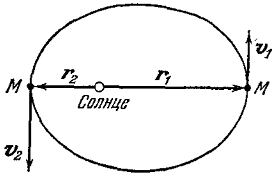

Рис. 6.20. Планета M обладает постоянным моментом импульса относительно Солнца. Поэтому $M\mathbf{r}_2\mathbf{v}_2=M\mathbf{r}_1\mathbf{v}_1$, где $\mathbf{r}_1$ — наибольшее, а $\mathbf{r}_2$ — наименьшее расстояние планеты Солнца. Орбиты всех планет имеют значительно меньший эксцентриситет, чем это изображено на чертеже. Для наглядности эксцентриситет на чертеже преувеличен.

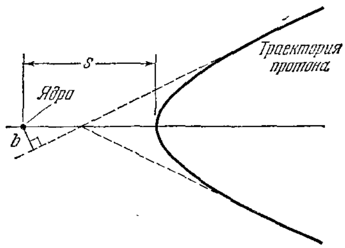

Рис. 6.21. Движение протона в кулоновском поле тяжелого ядра. Траектория представляет собой гиперболу (см. гл. 9). Наименьшее расстояние протона до ядра равно s. Параметр удара (прицельное расстояние) b представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки, в которой находится ядро, на направление первоначального участка траектории

Первый результат следует из того, что $\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{r}$ расположены в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{J}$, и сам вектор $\mathbf{J}$ постоянен по величине и направлению в поле центральных сил.

Для частицы, движущейся по кругу со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной $\mathbf{r}$,

$$J=Mvr=M\omega r^2. \qquad (66)$$

Планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Для того чтобы выполнялся закон сохранения момента импульса, каждая планета должна двигаться быстрее, приближаясь к точке, расположенной ближе всего к Солнцу, и медленней, приближаясь к наиболее удаленной от Солнца точке (рис. 6.20). Это следует из того, что в этих точках вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен $\mathbf{v}$ и момент импульса в этих точках равен Mvr. В силу закона сохранения величины Mvr момента импульса в этих точках

*) Площадь, описываемая радиусом-вектором за единицу времени. (*Прим. ред.*)

должны быть равны, и поэтому наименьшему значению r соответствует наибольшее значение v.

Пример. *Рассеяние протонов тяжелыми ядрами.* Пусть протон приближается к очень массивному ядру, обладающему зарядом Ze. На бесконечном удалении энергия протона равна $^1/_2 M_p v_0^2$. Как видно из рис. 6.21, при линейной экстраполяции траектории протона на большом удалении до наиболее близкого расстояния к тяжелому ядру протон должен был бы пройти мимо ядра на минимальном от него расстоянии b. Это расстояние называется прицельным параметром *) (параметром удара).

Каково будет наименьшее расстояние до рассеивающего ядра при движении протона по реальной орбите? Будем считать, что масса ядра бесконечно велика и поэтому энергией отдачи можно пренебречь. (Полное решение задачи о рассеянии приведено в разделе «Из истории физики» в гл. 15.)

Первоначальный момент импульса протона относительно тяжелого ядра будет равен $M_p v_0 b$, где v_0 — начальная скорость протона. На ближайшем к ядру расстоянии, обозначенном через s, момент импульса будет равен $M_p v_s s$, где v_s — скорость в этой точке. Так как действующая в этом случае сила является центральной, должен выполняться закон постоянства момента импульса, и поэтому

$$M_p v_0 b = M_p v_s s, \qquad v_s = \frac{v_0 b}{s}. \tag{66а}$$

Заметим, что мы пренебрегли моментом импульса, передаваемым тяжелому ядру.

При столкновении выполняется также и закон сохранения энергии. Первоначально протон обладает только кинетической энергией, равной $^1/_2 M_p v_0^2$. Энергия в точке наибольшего сближения равна

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s}, \tag{66б}$$

где первый член представляет собой кинетическую энергию, а второй — потенциальную энергию. Таким образом, из закона сохранения энергии получаем, что

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \tag{66в}$$

или, принимая во внимание (66а),

$$\frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^2\right]. \tag{66г}$$

Это уравнение может быть решено относительно s. Таким образом, законы сохранения позволяют нам получать полезную информацию о процессах столкновения.

*) Или прицельным расстоянием. (*Прим. ред.*)