

### 6.3. Инвариантность по отношению к вращению

Сохранение момента импульса является следствием инвариантности потенциальной энергии при повороте системы отсчета. Если существует момент внешних сил, то в общем случае мы должны при вращении системы совершить работу против этого момента. Если же мы совершаем работу, то потенциальная энергия должна измениться. Когда известно, что при вращении потенциальная энергия не изменяется, то это означает, что не существует момента внешних сил. При равенстве нулю момента внешних сил момент импульса сохраняется постоянным.

Это рассуждение может быть подкреплено в точности такими же аналитическими соображениями, которые содержались в уравнениях (1)—(7) при обсуждении вопроса о сохранении импульса. Пусть  $\Omega \mathbf{r}$  представляет собой вектор, который получается \*) при повороте  $\mathbf{r}$  на произвольный угол  $\theta$  относительно произвольной оси. Длина вектора  $\Omega \mathbf{r}$  такая же, как и длина вектора  $\mathbf{r}$ . Мы можем доказать, что *сохранение момента импульса следует из инвариантности по отношению к вращению, определяемой соотношением*

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = U(\Omega \mathbf{r}_1, \Omega \mathbf{r}_2, \dots, \Omega \mathbf{r}_N). \quad (67)$$

Какой смысл имеет это соотношение в применении к зависимости  $U$  от аргументов для двух частиц? Рассмотрим специальный случай, когда

$$U = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (68)$$

Замена вектора  $\mathbf{r}$  вращающимся вектором  $\Omega \mathbf{r}$  изменяет направление, но не величину разности векторов  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Поэтому, если  $U$  представляет собой инвариантную величину, то она может зависеть только от величины расстояния между двумя частицами. Итак,

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (69)$$

В этом случае сила  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  обязательно будет направлена вдоль линии  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Так как сила является центральной, то в соответствии с (50) момент вращения обращается в нуль.

Для  $N$  частиц инвариантность потенциала по отношению к повороту обеспечивается, если  $U$  зависит только от величины расстояния между несколькими частицами.

Потенциал, создаваемый отдельным электроном или ионом в кристалле, не обладает инвариантностью по отношению к вращению, потому что электрическое поле, созданное другими ионами, очень неоднородно и непостоянно.

\*) Следует иметь в виду, что здесь мы поворачиваем  $\mathbf{r}$ , а не систему отсчета; можно, однако, поворачивать и систему отсчета, но приводимые в тексте рассуждения окажутся более простыми, если мы будем поворачивать вектор  $\mathbf{r}$ . Символ  $\Omega$  означает не обычную величину, это так называемый *оператор*. Операторы мы будем рассматривать в т. IV.

Поэтому в общем случае мы не можем ожидать выполнения закона сохранения момента импульса для электронных оболочек иона в кристалле, даже несмотря на то, что момент импульса сохраняется для того же иона, если он находится в свободном пространстве. Невыполнение закона сохранения момента импульса для электронов в ионах кристаллов наблюдалось при изучении парамагнитных ионов в кристаллах, а также эффекта, называемого гашением орбитального момента импульса.

Момент импульса Земли  $J$  постоянен в системе отсчета, в начале которой находится Солнце, потому что в этом случае  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$  в каждой точке массы Земли, на которую действует гравитационная сила  $\mathbf{F}$  со стороны Солнца.

*Пример. Угловое ускорение, сопровождающее сжатие.* Частица массой  $M$  закреплена на нити и вращается; когда длина нити равна  $r_0$ , скорость равна  $v_0$ . Чему равна работа, совершаемая при укорочении нити до длины  $r$ ?

Сила, действующая на частицу со стороны нити, направлена по радиусу, и поэтому при ускорении нити момент вращения равен нулю. Следовательно, момент импульса должен оставаться постоянным при ускорении нити:

$$Mv_0r_0 = Mvr. \quad (70)$$

Кинетическая энергия частицы, находящейся на расстоянии  $r_0$ , равна  $\frac{1}{2} Mv_0^2$ , а при уменьшении расстояния до  $r$  увеличится до величины, равной

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Mv_0^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (71)$$

так как в соответствии с (70)  $v = v_0 r_0 / r$ . Отсюда следует, что работа  $W$ , совершаемая извне при укорочении нити от длины, равной  $r_0$ , до длины, равной  $r$ , определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2} Mv_0^2 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]. \quad (72)$$

Мы видим, что момент импульса действует на радиальное движение как некоторая эффективная потенциальная энергия отталкивания: мы должны совершить внешнюю работу над частицей, чтобы переместить ее с большего расстояния на меньшее, если мы требуем, чтобы в этом процессе момент импульса сохранялся постоянным.

Сравните этот результат с тем, который получается, когда частица вращается на нити, свободно наматывающейся на гладкий закрепленный стержень конечного диаметра. Почему, когда нить наматывается, в этом случае кинетическая энергия постоянна?

*Форма Галактики.* Результат, полученный в рассмотренном примере, очевидно, может быть использован для объяснения формы Галактики. Рассмотрим очень большую массу  $M$  газа, обладающую

первоначально некоторым моментом импульса \*). Газ сжимается в результате гравитационного взаимодействия. Так как объем, занимаемый газом, становится меньше, сохранение момента импульса требует увеличения угловой скорости. Но мы только что видели, что для увеличения угловой скорости должна быть совершена работа. Откуда же возьмется кинетическая энергия? Она может быть получена только за счет гравитационной энергии

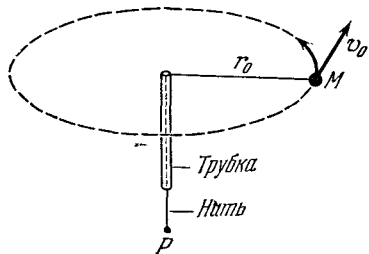


Рис. 6.22. Масса  $M$  совершает круговое движение по окружности радиусом  $r_0$  со скоростью  $v_0$ . Эта масса соединена с нитью, проходящей через трубку. Расстояние  $r_0$  может быть уменьшено, если потянуть за конец нити  $P$ .

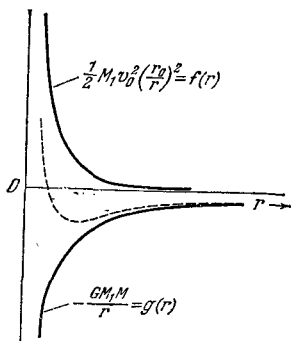


Рис. 6.23. Сжатие Галактики в плоскости, перпендикулярной к  $J$ , ограничено вследствие того, что центробежная «потенциальная энергия»  $f(r)$  возрастает при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому  $f(r) + g(r)$  имеет минимум при конечном значении  $r$  (пунктирная кривая).

газа. Частица массы  $M_1$  из внешней области Галактики будет обладать гравитационной потенциальной энергией благодаря взаимодействию частицы с Галактикой, порядок величины которой составляет

$$-\frac{GMM_1}{r}, \quad (73)$$

где  $r$  — расстояние от центра Галактики и  $M$  — масса Галактики. Эффективная потенциальная энергия, связанная с моментом импульса, зависит от  $r$  (рис. 6.23), как это видно из (72).

Сумма (72) и (73) обладает экстремальным значением (что является необходимым условием равновесия), когда

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{GMM_1}{r} + \frac{1}{2} M_1 v_0^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] = 0 \quad (74)$$

или когда

$$\left. \begin{aligned} \frac{GMM_1}{r^2} - M_1 v_0^2 \frac{r_0^2}{r^3} &= 0, \\ r &= \frac{v_0^2 r_0^2}{GM} = \frac{v^2 r^2}{GM}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

\*) В настоящее время при современном уровне знаний мы не можем сказать, откуда в данном месте появился газ или почему данная масса газа обладает моментом импульса. Массы, не обладающие моментом импульса, будут конденсироваться и принимать сферическую форму.

При значениях  $r$  меньших, чем это следует из (75), одной гравитационной энергии уже недостаточно для того, чтобы продолжалось сжатие. Из уравнений (75) следует, что при  $r = r_0$  сила притяжения  $GM_1/r^2$  равна центробежной силе  $M_1 v^2/r$ .

Облако газа или звезд может сплющиваться в направлении, параллельном оси полного момента импульса, без изменения величины импульса. Сжатие вызывается гравитационным притяжением; энергия, приобретаемая при сжатии, должна каким-то образом рассеиваться, и можно считать, что это рассеяние происходит

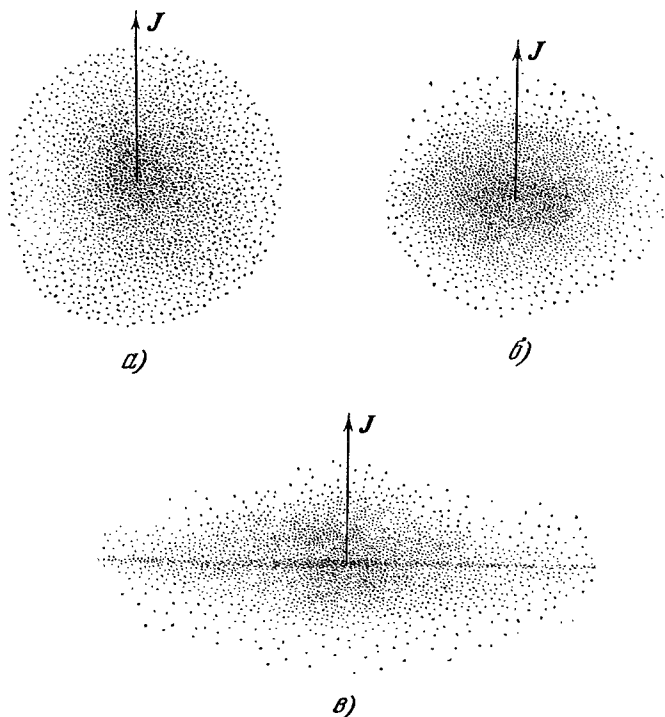


Рис. 6.24. Сначала облако газа (а), затем Галактика (б) начинает сплющиваться и, наконец, принимает форму блина с более или менее сферическим центральным ядром (в).

за счет излучения. Поэтому облако может довольно сильно сплющиться в направлении, параллельном  $\mathbf{J}$ , а сжатие в экваториальной плоскости ограничено. Такая модель эволюции Галактики была предложена Хабблом; однако некоторые недавние исследования заставляют считать, что эта модель слишком упрощена. Диаметр нашей Галактики порядка  $3 \cdot 10^4$  парсеков, или  $10^{23}$  см (1 парсек =  $3,084 \cdot 10^{18}$  см). Толщина Галактики в окрестности Солнца в известной степени зависит от того, как определять эту толщину, однако громадное большинство звезд группируется вблизи средней

плоскости и обладает толщиной в несколько сотен парсеков. Таким образом, Галактика в общем сильно сплюснута. Масса Галактики приблизительно в  $2 \cdot 10^{11}$  раз больше массы Солнца и составляет  $(2 \cdot 10^{11})(2 \cdot 10^{33}) \approx 4 \cdot 10^{44}$  г.

Массу Галактики можно оценить и из соотношений (75), если подставить в него известные значения  $v$  и  $r$  для Солнца. Солнце находится по направлению к внешнему краю Галактики на расстоянии около  $10^4$  парсеков  $\approx 3 \cdot 10^{22}$  см от оси Галактики. Орбитальная скорость Солнца относительно центра Галактики составляет приблизительно  $3 \cdot 10^7$  см/сек, поэтому из (75) мы можем оценить массу Галактики:

$$M = \frac{v^2 r}{G} \approx \frac{(10^{15}) (3 \cdot 10^{22})}{7 \cdot 10^{-8}} \text{ г} \approx 4 \cdot 10^{44} \text{ г.} \quad (76)$$

Производя эту оценку, мы пренебрегли влиянием масс, расположенных на большем расстоянии от центра Галактики, чем Солнце.

#### 6.4. Момент импульса Солнечной системы

На рис. 6.25 приведены моменты импульса некоторых составных частей Солнечной системы. Попробуем просто для контроля самих себя оценить какой-нибудь из приведенных на рис. 6.25 значений моментов импульса. Возьмем, например, планету Нептун, орбита которой очень близка к круговой. Среднее расстояние Нептуна от Солнца, приведенное в одной из работ,  $2,8 \cdot 10^9$  миль  $\approx 5 \cdot 10^9$  км  $\approx 5 \cdot 10^{14}$  см. Период обращения Нептуна относительно Солнца составляет 165 лет  $\approx 5 \cdot 10^9$  сек. Масса Нептуна около  $1 \cdot 10^{29}$  г. Момент импульса Нептуна относительно Солнца равен

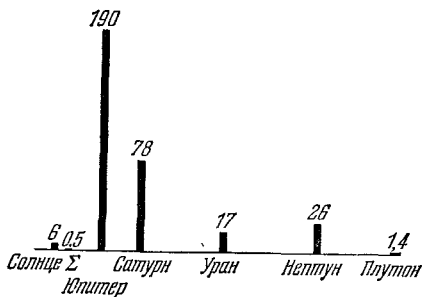


Рис. 6.25. Распределение момента импульса в Солнечной системе относительно центра Солнца. Символом  $\Sigma$  обозначена сумма моментов импульса Меркурия, Венеры, Земли и Марса. Обратите внимание на относительно малый вклад вращения Солнца вокруг его собственной оси (диаграмма построена в единицах  $10^{48}$  г·см<sup>2</sup>/сек).

$$J = Mvr = M \frac{2\pi r}{T} r \approx \frac{10^{29} \cdot 6 \cdot (25 \cdot 10^{28})}{5 \cdot 10^9} \approx 30 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2 / \text{сек}, \quad (77)$$

что, в общем, хорошо согласуется со значением  $26 \cdot 10^{48}$  г·см<sup>2</sup>/сек, указанным на рис. 6.25. Направление  $\mathbf{J}$  приблизительно одинаково для всех больших планет. Момент импульса Нептуна относительно его собственного центра масс значительно меньше. Момент импульса вращающейся однородной сферы порядка  $MvR$ , где  $v$  — линейная скорость точки на поверхности и  $R$  — радиус сферы. В действительности, однако, вследствие того, что масса сферы не