сконцентрирована в точке, находящейся на расстоянии $R$ от оси вращения, а распределена определенным образом относительно оси вращения, этот результат должен быть уменьшен для случая однородного распределения путем умножения на числовой коэффициент 2/5 (см. гл. 8). Поэтому

$$J_{\text{ц. м}} = \frac{2}{5}\frac{2\pi M R^2}{T}, \tag{78}$$

где $T \equiv 2\pi R/v$ означает период обращения планеты относительно ее собственной оси. Для Нептуна $T \approx 16$ *ч* $\approx 6 \cdot 10^4$ *сек* и $r \approx 1{,}5 \cdot 10^4$ миль $\approx 2{,}4 \cdot 10^9$ *см*. Таким образом, находим

$$J_{\text{ц.м}} \approx \frac{0,4 \cdot 6 \cdot 10^{29} \cdot (6 \cdot 10^{18})}{6 \cdot 10^4} \approx 2 \cdot 10^{43}\ г \cdot см^2/сек. \tag{79}$$

Эта величина мала по сравнению со значением момента импульса относительно Солнца, приведенным выше в соотношении (77).

Аналогичная оценка величины $J_{\text{ц.м}}$ для Солнца дает $6 \cdot 10^{48}$ *г·см²/сек*. Если принять во внимание вращение Солнца относительно оси, проходящей через его центр, то момент импульса Солнечной системы изменится всего лишь на 2%. Любая горячая звезда может обладать моментом импульса в 100 раз большим, чем Солнце. Таким образом, можно предполагать, что при образовании планетной системы момент импульса заимствуется от остывающей звезды. Если каждая звезда образует планетную систему, проходя подобно Солнцу через все стадии своей истории, то в нашей Галактике может существовать свыше $10^{10}$ звезд с планетами.

### 6.5. Внутренний момент импульса элементарных частиц

Из опытных данных, которые подробно рассматриваются в т. IV, известно, что элементарные частицы обладают внутренним моментом импульса $J_{\text{ц.м}}$. Внутренний момент импульса обычно называется *спином момента импульса*. Спин момента импульса элементарных частиц обозначается символом $S$ и измеряется в единицах, равных

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0542 \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. Мы видим, что размерность постоянной $\hbar$ точно такая же, как и момента импульса $Mvr$. Значения $S$ для некоторых элементарных частиц приведены ниже в таблице.

| Частица | Спин момента импульса, $S$ | Частица | Спин момента импульса, $S$ |
|---|---|---|---|
| Электрон | 1/2 | $\mu^{\pm}$-мезон | 1/2 |
| Фотон | 1 | $\pi^{\pm}$, $\pi^0$-мезон | 0 |
| Нуклон (протон или нейтрон) | 1/2 | $\Lambda^0$-гиперон | 1/2 |
| Нейтрино | 1/2 | $K^{\pm}$, $K^0$-мезон | 0 |

**Задачи**

1. *Момент импульса спутника.* а) Чему равен момент импульса (относительно центра орбиты) спутника Земли массой $M_c$, который движется по круговой орбите радиусом $r$? Результат выразить через $r$, $G$, $M_c$ и $M_З$.

Ответ. $J=(GM_З M_c^2 r)^{1/2}$.

б) Вычислить момент импульса (в единицах системы СГС) массы $M_c=100$ *кг* для орбиты, радиус которой в два раза больше радиуса Земли.

2. *Влияние трения на движение спутника.* а) Какое влияние оказывает трение при движении спутника в атмосфере по круговой (или близкой к круговой) орбите? Почему трение увеличивает скорость спутника?

б) Увеличивает или уменьшает трение момент импульса спутника, измеренный относительно центра Земли? Почему?

3. *Соотношение между энергией и моментом импульса для спутника.* Выразить кинетическую, потенциальную и полную энергию спутника массой $M$, движущегося по круговой орбите радиусом $r$, через момент импульса $J$.

Ответ. $$K=\frac{J^2}{2Mr^2}; \quad U=-\frac{J^2}{Mr^2}; \quad E=-\frac{J^2}{2Mr^2}.$$

4. *Электрон, вращающийся вокруг протона.* Электрон движется вокруг протона по круговой орбите, радиус которой равен $r=0{,}5$ Å$=0{,}5\cdot10^{-8}$ *см*.

а) Чему равен орбитальный момент импульса электрона относительно протона?

Ответ. $1\cdot10^{-27}$ *эрг·сек*.

б) Чему равна полная энергия, выраженная в эргах и электрон-вольтах?

5. *Момент внутренних сил.* Рассмотрим изолированную систему, состоящую из трех частиц 1, 2 и 3 (показанных на рис. 6.26), силы взаимодействия между которыми можно считать центральными: $F_{12}=1$ *дин*, $F_{13}=0{,}6$ *дин*, $F_{23}=0{,}75$ *дин*, где $F_{ij}$ означает силу, с которой частица $i$ действует на частицу $j$.

а) Подробно выпишите все силы, разложив их на компоненты в соответствующей системе координат, и покажите, что момент внутренних сил равен нулю:

$$\mathbf{N}_{\text{внутр}}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_{ij}=0.$$

б) Покажите, что такой же результат получится, если в произведении поменять индексы и произвести суммирование $\mathbf{r}_j\times\mathbf{F}_{ji}$.

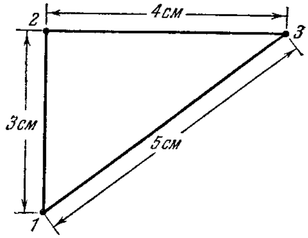


Рис. 6.26.

6. *Давление лестницы на стену.* Лестница, масса которой 20 *кг* и длина 10 *м*, приставлена к гладкой стене под углом 30° к вертикали. Между полом и лестницей существует трение. Чему равна сила (в динах), с которой лестница давит на стену? (Указание: используйте тот факт, что момент сил должен быть равен нулю, когда лестница находится в покое.)

Ответ. $5{,}6\cdot10^5$ *дин*.

7. *Кинетическая энергия при вращательном движении.* Чему равна кинетическая энергия вращательного движения (в эргах) тонкого круглого обруча радиусом 1 *м*, плотность которого на единицу длины равна 1 *г/см*, вращающегося со скоростью 100 *об/сек* относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости?

8. *Момент импульса Луны.* Сравните величину момента импульса Луны на ее орбите вокруг Земли с величиной момента импульса Луны при вращении вокруг ее собственной оси, равной

$$\frac{2}{3}M\omega R_Л^2.$$

9. *Момент импульса при сближении двух частиц.* Нейтрон с энергией 1 *Мэв* пролетает мимо протона на таком расстоянии, что момент импульса нейтрона относительно протона равен около $10^{-26}$ *эрг·сек.* Чему равно самое близкое расстояние, на котором нейтрон пролетает мимо протона? (Энергией взаимодействия между обеими частицами можно пренебречь.)

Ответ. $4\cdot 10^{-12}$ *см.*

10. *Момент импульса линейного движения.* Частица массой $M$ движется со скоростью $\mathbf{v}_1=v\hat{\mathbf{x}}$ вдоль прямой линии, уравнение которой $y=y_1$. В момент времени $t=0$ частица находится в точке с координатами $(0, y_1)$.

а) Вычислить момент импульса частицы относительно начала координат.

Ответ.— $Mvy_1\hat{\mathbf{z}}$.

б) Вычислить полный момент импульса относительно точки с координатами $(0, y_2)$, где $y_2<y_1$.

11. *Столкновение двухатомной частицы с одноатомной.* Две одинаковые массы соединены между собой жестким стержнем, длина которого $a$ и массой которого можно пренебречь. Центр массы этой гантелеподобной системы расположен в пространстве, свободном от действия силы тяжести. Система вращается относительно центра масс с угловой скоростью $\omega$. Одна из вращающихся масс сталкивается с третьей частицей, масса которой также равна $M$, и прилипает к ней.

а) Найти центр тяжести системы, состоящей из трех частиц, в момент, предшествующий столкновению. Чему равна скорость центра масс?

б) Чему равен момент импульса системы, состоящей из трех масс, относительно центра масс в момент, предшествующий столкновению? в момент, следующий за столкновением?

в) Чему равна угловая скорость системы относительно центра масс после столкновения?

г) Чему равны начальное и конечное значения кинетической энергии?

12. *Момент импульса мяча на привязи.* Цель игры в мяч на привязи состоит в том, чтобы достаточно сильными и точными ударами по мячу заставить веревку, к которой привязан мяч и другой конец которой укреплен на конце вертикального шеста, намотаться на этот шест в одном направлении; второй игрок может таким же способом намотать веревку в другом направлении. Эта игра очень оживленная, и динамика движения мяча достаточно сложна. Будем рассматривать более простой случай движения, при котором мяч движется в горизонтальной плоскости по спирали уменьшающегося радиуса и веревка наматывается на шест после одного удара, придающего мячу начальную скорость $v_0$. Длина веревки $l$ и радиус шеста $a\ll l$ (рис. 6.27).

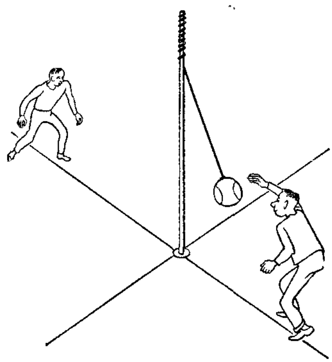

Рис. 6.27.

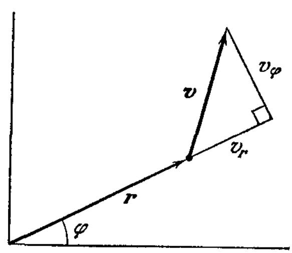


Рис. 6.28.

а) Что такое мгновенный центр вращения?

б) Существует ли момент вращения относительно оси, проходящей через центр шеста? Сохраняется ли постоянным момент импульса?

в) Вычислить скорость как функцию времени, допуская, что кинетическая энергия сохраняется постоянной.

г) Чему равна угловая скорость после того, как мяч совершит пять полных оборотов?

Ответ.

$$\omega = \frac{(l - 10\pi a)\, v_0}{a^2 + (l - 10\pi a)^2}.$$

**13.** *Потенциальная энергия центробежных сил.* В этой задаче удобно использовать плоские полярные координаты $r$ и $\varphi$ для движения в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (рис. 6.28).

а) Покажите, что в этой системе координат скорость будет иметь вид

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

где $v_r = dr/dt$ представляет собой скорость изменения длины вектора $\mathbf{r}$, а $v_\varphi = r\, d\varphi/dt$.

б) Покажите, что кинетическая энергия частицы в этой системе координат имеет вид

$$K = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2),$$

где $\omega = d\varphi/dt$.

в) Покажите, что полная энергия равна

$$E = U(r) + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2},$$

где $J$ — момент импульса частицы относительно закрепленной оси, перпендикулярной к плоскости движения. (Указание: вспомните уравнение (72).)

г) Если сила, действующая на частицу, является центральной, то ее момент равен нулю и момент импульса при движении сохраняется постоянным. Величина $J^2/2Mr^2$ иногда называется потенциальной энергией центробежных сил. Покажите, что эта величина соответствует действию радиальной силы, равной $J^2/Mr^3$ и направленной наружу.

д) Покажите, что если $U(r) = \frac{1}{2} Cr^2$, то $U(r)$ соответствует действию радиальной силы, равной $-Cr$ и направленной внутрь.

е) Покажите из г) и д), что равновесие этих сил эквивалентно условию $\omega^2 = C/M$.

**14.** *Выражение для момента импульса.* Покажите, что если $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$ отнесены к центру масс, совпадающему с началом координат, то существует соотношение $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$, даже если центр масс обладает переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$ относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

## Дополнение. Столкновение метеоритов с атмосферой

Метеориты представляют собой небольшие тела (рис. 6.29) в межпланетном пространстве, движущиеся по замкнутым орбитам вокруг Солнца и время от времени случайно пролетающие сквозь атмосферу Земли, производя при этом видимое глазом свечение. При проникновении метеоритов в атмосферу Земли их движение замедляется вследствие обмена импульсами между ними и молекулами воздуха, с которыми они сталкиваются. Когда среднее расстояние летящей молекулы между двумя соударениями (средняя длина свободного пробега) велико по сравнению с линейными размерами метеорита, задача о замедлении решается как задача об индивидуальных столкновениях молекул воздуха с метеоритами, а не как задача классической газодинамики.

а) Выведем соотношение для замедления, выразив его через массу $M$, скорость $v$ и эффективное поперечное сечение *) метеорита, исходя из грубого допущения, что начальная скорость молекул мала по сравнению с $v$. Это вполне обоснованное

*) Если мы говорим, что метеорит обладает эффективным поперечным сечением, мы имеем в виду, что, когда метеорит проходит какое-то расстояние $x$, он испытывает столько столкновений, сколько молекул содержится в объеме $Sx$.