

г) Чему равна угловая скорость после того, как мяч совершит пять полных оборотов?

О т в е т.

$$\omega = \frac{(l - 10\pi a) v_0}{a^2 + (l - 10\pi a)^2}.$$

13. Потенциальная энергия центробежных сил. В этой задаче удобно использовать плоские полярные координаты r и φ для движения в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (рис. 6.28).

а) Покажите, что в этой системе координат скорость будет иметь вид

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

где $v_r = dr/dt$ представляет собой скорость изменения длины вектора \mathbf{r} , а $v_\varphi = r d\varphi/dt$.

б) Покажите, что кинетическая энергия частицы в этой системе координат имеет вид

$$K = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2),$$

где $\omega = d\varphi/dt$.

в) Покажите, что полная энергия равна

$$E = U(r) + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2},$$

где J — момент импульса частицы относительно закрепленной оси, перпендикулярной к плоскости движения. (*У к а з а н и е:* вспомните уравнение (72).)

г) Если сила, действующая на частицу, является центральной, то ее момент равен нулю и момент импульса при движении сохраняется постоянным. Величина $J^2/2Mr^2$ иногда называется потенциальной энергией центробежных сил. Покажите, что эта величина соответствует действию радиальной силы, равной J^2/Mr^3 и направленной наружу.

д) Покажите, что если $U(r) = \frac{1}{2} Cr^2$, то $U(r)$ соответствует действию радиальной силы, равной $-Cr$ и направленной внутрь.

е) Покажите из г) и д), что равновесие этих сил эквивалентно условию $\omega^2 = C/M$.

14. Выражение для момента импульса. Покажите, что если \mathbf{J} и \mathbf{N} отнесены к центру масс, совпадающему с началом координат, то существует соотношение $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$, даже если центр масс обладает переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$ относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Д о п о л н е н и е. Столкновение метеоритов с атмосферой

Метеориты представляют собой небольшие тела (рис. 6.29) в межпланетном пространстве, движущиеся по замкнутым орбитам вокруг Солнца и время от времени случайно пролетающие сквозь атмосферу Земли, производя при этом видимое глазом свечение. При проникновении метеоритов в атмосферу Земли их движение замедляется вследствие обмена импульсами между ними и молекулами воздуха, с которыми они сталкиваются. Когда среднее расстояние летящей молекулы между двумя соударениями (средняя длина свободного пробега) велико по сравнению с линейными размерами метеорита, задача о замедлении решается как задача об индивидуальных столкновениях молекул воздуха с метеоритами, а не как задача классической газодинамики.

а) Выведем соотношение для замедления, выразив его через массу M , скорость v и эффективное поперечное сечение *) метеорита, исходя из грубого допущения, что начальная скорость молекул мала по сравнению с v . Это вполне обоснованное

*) Если мы говорим, что метеорит обладает эффективным поперечным сечением, мы имеем в виду, что, когда метеорит проходит какое-то расстояние x , он испытывает столько столкновений, сколько молекул содержится в объеме Sx .

предположение, так как в противном случае молекулы воздуха должны были бы выходить за пределы атмосферы. Покажите, что

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Gamma S \rho v^2}{M},$$

где ρ — плотность атмосферы и Γ — численный коэффициент порядка единицы. Значение Γ будет зависеть от того, будем ли мы считать столкновения упругими или неупругими. Допустим, что столкновения являются неупругими, при которых молекулы прилипают к метеоритам. Если хотите, можно считать, что метеорит представляет собой кубик, грань которого перпендикулярна направлению движения.

б) Масса метеоритов уменьшается либо в результате откалывания отдельных кусочков, либо вследствие испарения. Используя принцип сохранения энергии, выведите выражение для скорости уменьшения массы, выразив ее через скорость,

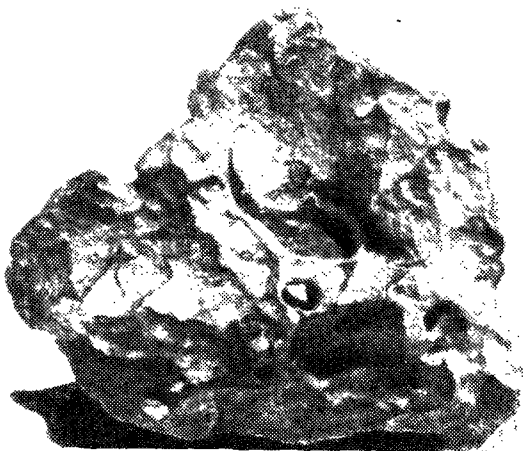


Рис. 6.29. 95-фунтовый осколок метеорита из Каньона Дьявола. Его размер — около 30 см в диаметре. (Фото Национальной лаборатории в Брукхейвене)

массу и плотность метеорита, а также через плотность воздуха. Используйте величину ζ для обозначения постоянной, выражающей количество энергии, требуемое для потери 1 г массы метеоритного вещества одним из возможных способов, и величину Λ для обозначения коэффициента, характеризующего эффективность обмена энергией между молекулами воздуха и метеоритом. В этом случае можно пренебречь кинетической энергией, теряемой при замедлении. Приближенный результат имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\Lambda M^{2/3} \rho v^3}{2 \zeta \rho_m^{2/3}},$$

где ρ_m — плотность метеорита и сделано допущение о том, что $S \equiv (M/\rho_m)^{2/3}$. Это допущение не совсем точно.

в) Оцените из а) порядок величины dv/dt для правдоподобных значений соответствующих величин. Используйте значение плотности $\rho = 8 \cdot 10^{-10}$ г/см³ на высоте 100 км. На этой высоте средняя длина свободного пробега молекул N_2 составляет около 10 см. Эти данные можно найти в обычных справочниках.