ГЛАВА 7

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Колебание гармонического осциллятора является очень важным примером периодического движения и может служить точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. К числу классических систем, аналогичных гармоническому осциллятору, могут быть отнесены любые системы, которые, будучи слегка выведены из положения равновесия, совершают устойчивые колебания. К ним относятся:

1. Математический маятник в пределах малых углов отклонения.
2. Масса на пружине в пределах малых амплитуд колебаний.
3. Электрический контур, состоящий из самоиндукции и емкости, для токов или напряжений столь малых, что элементы контура можно считать линейными.

Электрический или механический элемент контура может считаться линейным, если смещение из положения равновесия прямо пропорционально возбуждающей силе. Большинство явлений в физике (не все из которых представляют интерес) могут считаться линейными, если рассматриваемая область достаточно мала, и большинство кривых, с которыми приходится иметь дело, в небольших пределах могут считаться прямыми линиями.

Наиболее важными свойствами гармонического осциллятора являются следующие:

1. Частота колебаний не зависит от амплитуды.
2. Если действуют несколько возбуждающих сил, то эффект их суммарного действия может быть получен в результате сложения эффектов от каждой силы в отдельности (принцип суперпозиции).

Эти свойства гармонического осциллятора мы и рассмотрим в данной главе. Мы познакомимся как со свободным, так и с вынужденным движением, а также учтем влияние трения и небольшой ангармоничности или нелинейного взаимодействия, которые могут иметь место в системе. Кроме того, мы постараемся разобраться в том, что происходит, когда система уже не может считаться линейной.

7.1. Математический маятник

Математический маятник состоит из материальной точки массой M, расположенной на нижнем конце невесомого стержня длиной L, свободно вращающегося вокруг оси, проходящей через его верхний конец (рис. 7.1). Наша задача заключается в том, чтобы найти частоту собственных колебаний маятника. Самый простой путь решения этой задачи состоит в том, чтобы написать в соответствующем виде второй закон динамики $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$. Это может быть сделано так же, как и в задаче 6. Однако очень поучительно попытаться решить эту задачу, исходя из закона сохранения энергии. Чтобы получить уравнения (18)—(22), можно также исходить и из момента импульса. Отклонения маятника будем измерять углом θ, который стержень образует с вертикалью.

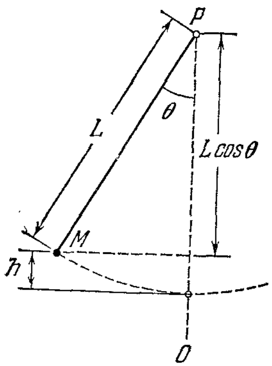

Рис. 7.1 Математический маятник состоит из материальной точки массой M, расположенной на конце невесомого стержня длиной L. Маятник совершает колебания, вращаясь относительно оси, проходящей через точку P и перпендикулярной к плоскости чертежа. Линия OP вертикальна.

Как видно из рис. 7.1, когда стержень отклонен на угол θ, его нижний конец поднимается на величину

$$h=L-L\cos\theta. \tag{1}$$

Потенциальная энергия массы M в гравитационном поле Земли равна

$$U(h)=Mgh. \tag{2}$$

При этом неотклоненному положению приписывается нулевое значение потенциальной энергии. Подставляя (1) в (2), получаем

$$U(\theta)=MgL(1-\cos\theta), \qquad U(0)=0. \tag{3}$$

Кинетическая энергия маятника равна

$$K=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2, \tag{4}$$

где $v=L\dot{\theta}$ означает скорость, выраженную через скорость изменения угла отклонения. Полная энергия равна

$$E=K+U=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2+MgL(1-\cos\theta). \tag{5}$$

Из закона сохранения энергии известно, что эта сумма должна сохраняться постоянной. Мы воспользуемся этим фактом, чтобы получить выражение для частоты движения, хотя возможно, что многие предпочтут более короткий путь получения уравнений (18)—(22), приведенных ниже. Если принять во внимание соотношение (рис. 7.2)

$$\cos\theta\cong 1-\frac{1}{2}\theta^2, \tag{6}$$

то для $\theta \ll 1$ *рад* мы можем, вместо (5), для энергии написать следующее приближенное соотношение:

$$E \approx \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} MgL\theta^2. \tag{7}$$

Решая это уравнение относительно $\dot{\theta}$, находим

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2} \left(\frac{2E}{MgL} - \theta^2\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Обозначим конечные (поворотные) точки движения через $-\theta_0$ и θ_0; тогда амплитуда колебаний будет равна θ_0. В этих точках маятник

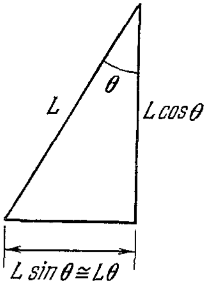

Рис. 7.2. Из теоремы Пифагора и выражения для бинома Ньютона вытекает, что $\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ для $\theta \ll 1$ *рад.*

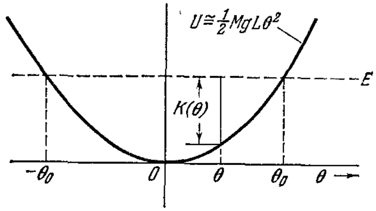

Рис. 7.3. Маятник совершает колебания в пределах от $-\theta_0$ до $+\theta_0$. В этих «поворотных точках» $K=0$ и $U=E$. При $\theta=0$ $U=0$ и $K=E$. Для $\theta \ll 1$ *рад* $U \cong \frac{1}{2} MgL\,\theta^2$

на мгновение остается в покое, и его кинетическая энергия в эти моменты равна нулю (рис. 7.3). Из (7) при $\dot{\theta}=0$ мы получаем

$$E = \frac{1}{2} MgL\theta_0^2, \quad \theta_0^2 = \frac{2E}{MgL}. \tag{9}$$

Таким образом, мы можем переписать (8) в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2} (\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2} \tag{10}$$

или

$$\frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2} dt. \tag{11}$$

Этот вид удобен для интегрирования.

Если начальное условие или фаза движения таковы, что при $t=0$ $\theta=\theta_0$, то

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2} \int_0^t dt. \tag{12}$$

Интеграл, стоящий слева, элементарен и легко вычисляется:

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} = \left[\arcsin\frac{\theta}{\theta_0}\right]_{\theta_1}^{\theta} = \arcsin\frac{\theta}{\theta_0} - \arcsin\frac{\theta_1}{\theta_0} = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2} t. \tag{13}$$

Так как $\sin \arcsin \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta}{\theta_0}$, то мы можем переписать (13) в виде

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sin\left[\left(\frac{g}{L}\right)^{1/2} t + \arcsin\frac{\theta_1}{\theta_0}\right] \tag{14}$$

или

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{15}$$

где мы можем для угловой частоты ω_0 и фазы φ написать, что

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2}, \quad \varphi = \arcsin\frac{\theta_1}{\theta_0}. \tag{16}$$

Здесь φ — постоянная движения. Хотя эта величина имеет размерность угла, ее нельзя наглядно изобразить в виде какого-то угла. Читатель должен различать три угловые величины θ_0, θ_1 и φ:

1. θ_0— максимальная амплитуда колебаний.

2. θ_1— угол, при котором движение начинается в момент времени $t=0$. Маятник может быть приведен в движение из положения $\theta=\theta_1$ либо с нулевой, либо с некоторой начальной скоростью. В зависимости от этого θ_0 будет иметь то или иное значение.

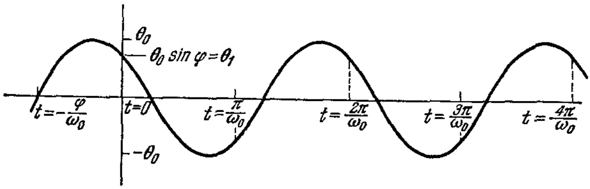

Рис. 7.4. График зависимости функции $\theta=\theta_0 \sin(\omega_0 t+\varphi)$ от t. По прошествии промежутка времени, соответствующего полному периоду колебания, равному $2\pi/\omega_0$, функция принимает то же самое значение. Значение функции θ при $t=0$ обозначено через θ_1 и равно $\theta_1=\theta_0 \sin\varphi$. Зная φ, можно вычислить величину θ_1. Величину θ_0 мы называем *амплитудой* колебания, а φ — *фазой* колебания.

3. Угол φ, вообще говоря, не является углом в обычном смысле, и его нельзя указать при движении осциллятора. Он зависит от θ_1 и θ_2 и представляет собой соответствующую поправку к выражению $\theta=\theta_0 \sin \omega_0 t$, когда движение начинается не со значения $\theta_1=0$. Из соответствующих начальных условий мы можем найти значение φ из (16) (рис. 7.4).

Символом ω_0 часто обозначается угловая частота собственного или свободного движения колеблющейся системы. Индекс «нуль» при ω не имеет отношения к моменту времени $t=0$. Угловая частота ω_0*) связана с частотой f_0 свободных колебаний маятника

*) Часто мы будем называть угловую частоту просто частотой. Так поступают многие физики, и это не приводит к путанице. Использование символа ω вместо f или ν означает, что речь идет о величине, имеющей смысл угловой частоты. Численные значения ν и f обычно выражают в оборотах в секунду; значение ω выражают в радианах в секунду или просто в $сек^{-1}$, подразумевая при этом радианы в секунду. Радиан представляет собой безразмерную величину. Таким образом, мы будем различать эти величины по их размерности и выражать ν в колебаниях в секунду или в оборотах в секунду, а угловую частоту ω — в радианах в секунду. Обе эти величины имеют размерность $сек^{-1}$.

соотношением

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(g/L)^{1/2}}{2\pi}. \qquad (17)$$

Задачу о математическом маятнике мы можем решить также и исходя из уравнений движения. Уравнение (10) было получено из закона сохранения энергии, записанного в виде соотношения (5). Отметим, что уравнение (10) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируя которое один раз, мы получили соотношение (14). Уравнение же движения, как это будет ясно из дальнейшего, представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. И для того, чтобы найти выражение для угла отклонения, его нужно проинтегрировать дважды. Поэтому ясно, что применение закона сохранения энергии очень часто может избавить нас от одного интегрирования.

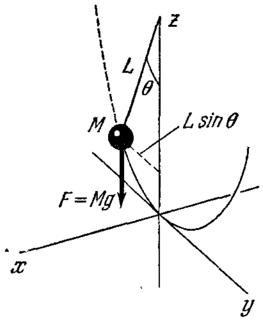

Рис. 7.5. Маятник колеблется в плоскости yz. На массу M в направлении $-z$ действует сила тяжести, равная Mg. Момент N_x этой силы относительно оси x равен $MgL \sin\theta$.

Расположим ось x перпендикулярно плоскости движения (рис. 7.5). Момент N_x, создаваемый силой тяжести $F=Mg$, относительно точки подвеса маятника равен

$$N_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = LMg \sin\theta. \qquad (18)$$

Момент импульса J_x относительно той же точки равен

$$J_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x = -ML^2\dot{\theta}, \qquad (19)$$

где $p = ML\dot{\theta}$ представляет собой импульс. Из гл. 6 мы знаем, что скорость изменения момента импульса равна моменту действующей силы, т. е.

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg \sin\theta. \qquad (20)$$

Отсюда для уравнения движения получаем

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \qquad (21)$$

В пределе, при $\theta \ll 1$, т. е. при малых углах отклонения, мы можем приближенно заменить $\sin\theta$ на θ, и тогда (21) примет вид

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0.} \qquad (22)$$

Это соотношение представляет собой уравнение движения *гармонического осциллятора*, угловая частота которого равна

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2}. \qquad (23)$$

Для того чтобы убедиться в этом, укажем, что полученный нами результат (15) или любая линейная комбинация $\sin \omega_0 t$ или $\cos \omega_0 t$ является решением уравнения (22). Из (15) получаем

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{24}$$

$$\dot{\theta} = \theta_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{25}$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \tag{26}$$

Подставляя (24) и (26) в (22), находим

$$-\omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{g}{L} \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0, \tag{27}$$

что согласуется с (23), если положить $\omega_0^2 = g/L$.

Все расчеты значительно упрощаются, если воспользоваться соотношением

$$\theta = \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \tag{28}$$

Тогда

$$\dot{\theta} = i\omega_0 \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = i\omega_0 \theta, \tag{29}$$

$$\ddot{\theta} = i\omega_0 \dot{\theta} = (i\omega_0)^2 \theta = -\omega_0^2 \theta. \tag{30}$$

Мы видим, что (30) в точности совпадает с (22), если $\omega_0^2 = g/L$.

Таким образом, как (24), так и (28) удовлетворяют уравнению движения (22). Какое же из этих двух решений является правильным? Ответ гласит, что соотношение (24) является правильным физическим решением, дающим значение угла отклонения маятника в зависимости от времени t. Уравнение (28) выглядит «нефизически», так как содержит мнимую величину i. При решении уравнения движения с помощью комплексных величин (что с математической стороны иногда бывает легче) мы должны помнить, что в конце мы берем реальную часть для того, чтобы получить решение, имеющее физический смысл. Заметим, что реальная часть (28) в действительности и выражает соотношение (24), и поэтому (28) также является правильным решением.

Пример. *Нелинейные эффекты*. Теперь мы рассмотрим маятник, который колеблется с амплитудой настолько большой, что мы не можем пренебрегать членом, содержащим θ^3 в разложении в ряд $\sin \theta$, как мы это делали выше в (22). Какое влияние на движение маятника оказывает член, содержащий θ^3? Это элементарный пример ангармонического осциллятора. Ангармонические, или нелинейные, задачи обычно с трудом поддаются точному решению (за исключением тех случаев, когда используются электронно-вычислительные машины), однако во многих случаях приближенные решения дают нам достаточно ясное представление о рассматриваемом явлении. Разложение $\sin \theta$ в ряд с сохранением членов, содержащих θ^3, обычно называемое «разложением до порядка θ^3», имеет вид

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \ldots \tag{31}$$

В этом случае порядок уравнения движения (21) также повышается:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta-\frac{\omega_0^2}{6}\theta^3=0, \tag{32}$$

где ω_0^2 равняется g/L. Уравнение (32) представляет собой уравнение движения *ангармонического осциллятора*.

Мы можем найти приближенное решение уравнения (32) в виде

$$\theta=\theta_0\sin\omega t+\varepsilon\theta_0\sin 3\omega t, \tag{33}$$

где ε — безразмерная постоянная, значительно меньшая единицы, если $\theta_0\ll 1$.

В этом случае мы видим, что движение приближенно (или точно — мы еще не знаем этого!) может быть представлено как наложение двух различных движений: $\sin\omega t$ и $\sin 3\omega t$. Присутствие члена $\sin 3\omega t$ можно понять, если воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$\sin^3 x\equiv\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x. \tag{34}$$

Таким образом, член θ^3 в дифференциальном уравнении (32) приводит к появлению в решении члена $\sin 3\omega t$. Для того чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению, содержащему θ^3, мы должны были к члену, содержащему $\sin\omega t$, прибавить член $\varepsilon\sin 3\omega t$. Рассуждая далее подобным образом, мы придем к выводу, что новый член $\varepsilon\sin 3\omega t$ в частном решении (33), будучи возведен в куб, приведет к появлению члена $\varepsilon^3\sin 9\omega t$, и т. д. Очевидно, нет оснований для того, чтобы этот процесс прекратился, но если $\varepsilon\ll 1$, то ряд будет быстро сходиться, так как в члены, соответствующие высоким частотам, в качестве множителей будут входить все более и более высокие степени ε.

Теперь ясно, что в лучшем случае (33) можно считать только приближенным решением. Нам остается определить ε, а также ω; при малых амплитудах частота ω должна стремиться к ω_0, а при больших амплитудах эта величина будет иметь другое значение. Для простоты мы предположим, что при $t=0$ $\theta=0$.

Такого типа приближенное решение дифференциального уравнения называется решением методом возмущения, потому что один из членов дифференциального уравнения «возмущает» движение, описываемое уравнением, не содержащим этого члена.

Как вы видели, мы получили решение в виде (33), основываясь лишь на догадках. Довольно легко проверить, насколько правильны эти догадки, и отбросить те из них, которые окажутся неправильными. Из (33) мы находим

$$\left.\begin{aligned}\ddot\theta&=-\omega^2\theta_0\sin\omega t-9\omega^2\varepsilon\theta_0\sin 3\omega t,\\ \theta^3&=\theta_0^3(\sin^3\omega t+3\varepsilon\sin^2\omega t\sin 3\omega t+\ldots),\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где отброшены члены, содержащие ε^2 и ε^3, вследствие нашего допущения о том, что мы будем искать решение при $\varepsilon\ll 1$. Принимая во внимание тригонометрическое тождество (34), мы можем переписать (32) в виде

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\theta}&=-\omega^2\theta_0\sin\omega t-9\omega^2\varepsilon\theta_0\sin 3\omega t,\\ \omega_0^2\theta&=+\omega_0^2\theta_0\sin\omega t+\omega_0^2\varepsilon\theta_0\sin 3\omega t,\\ -\frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3&=-\frac{3\omega_0^2}{24}\theta_0^3\sin\omega t+\frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^3\sin 3\omega t-\\ &\qquad-\frac{\omega_0^2}{2}\theta_0^3\varepsilon\sin^2\omega t\sin 3\omega t.\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

Сложим теперь почленно эти три уравнения. Тогда, в соответствии с (32), сумма членов слева должна быть равна нулю. Если (33) является решением уравнения (32) для любого момента времени, то в правых частях (36) коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\sin 3\omega t$ в отдельности должны обращаться в нуль. Предположим, что эти коэффициенты не обращаются в нуль. Тогда мы должны были бы получить выражение типа $A\sin\omega t+B\sin 3\omega t=0$, где A и B — постоянные величины. Но такое уравнение не может быть справедливым для любого момента времени, и, следовательно, A и B должны быть в отдельности равны нулю. Когда в приведенном выше решении (33) мы остановились на члене, содержащем частоту $3\omega t$, и не стали выписывать члены, содержащие все возможные частоты, мы учли лишь наиболее важные члены. Условие равенства нулю коэффициента при $\sin\omega t$ в (36) дает

$$-\omega^2+\omega_0^2-\frac{3}{24}\omega_0^2\theta_0^2=0,\tag{37}$$

или

$$\omega^2=\omega_0^2\left(1-\frac{1}{8}\theta_0^2\right),\qquad \omega\cong\omega_0\left(1-\frac{1}{16}\theta_0\right).\tag{38}$$

Последнее выражение получено в результате биномиального разложения квадратного корня. Уравнения (38) выражают зависимость ω от θ_0. Величина ω_0 представляет собой предельное значение ω при $\theta_0\to 0$, т. е. при предельно малых значениях амплитуды. При $\theta_0=0{,}3$ *рад* относительное изменение частоты равно $\Delta\omega/\omega\approx 10^{-2}$, где $\Delta\omega=\omega-\omega_0$. Отметим, что при больших амплитудах частота колебаний маятника зависит от амплитуды.

Решение в форме (33) содержит также член с $\sin 3\omega t$. Вклад этого члена в амплитуду по сравнению с вкладом члена $\sin\omega t$ зависит от величины ε, которая может быть определена из условия равенства нулю коэффициента при $\sin 3\omega t$ в (36):

$$-9\omega^2\varepsilon+\omega_0^2\varepsilon+\frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^2=0.\tag{39}$$

Полагая $\omega^2\cong\omega_0^2$, находим из (39)

$$\varepsilon\cong\frac{\theta_0^2}{192}.\tag{40}$$

Величина ε определяет ту часть, которую составляет член $\sin 3\omega t$ в выражении для θ, определяемом главным образом членом $\sin\omega t$. При $\theta_0=0{,}3$ *рад* $\varepsilon\approx 10^{-3}$, что составляет весьма малую величину. Коэффициент при члене, содержащем $\sin^2\omega t\sin 3\omega t$, порядка ε или θ_0^2 и мал по сравнению с удержанными нами членами. Поэтому в рассматриваемом приближении мы пренебрегли этим членом.

Почему мы не включили в (33) член, содержащий $\sin 2\omega t$? Попробуйте сами рассмотреть решение в виде

$$\theta=\theta_0\sin\omega t+\eta\theta_0\sin 2\omega t \tag{41}$$

и посмотрите, что из этого получится. Вы придете к выводу, что $\eta=0$. Маятник совершает колебания, содержащие главным образом третью гармонику (т. е. в выражение для его отклонения входит член с $\sin 3\omega t$) и не содержащие второй гармоники. Другой результат мы получим в том случае, когда уравнение движения будет содержать член с θ^2.

Чему будет равна частота маятника при больших амплитудах? В этом случае движение не может характеризоваться только единственной частотой. Мы уже видели, что наиболее важный член (т. е. наибольший по величине) — это член с $\sin\omega t$, и поэтому частоту ω мы можем назвать *основной частотой* маятника. В нашем приближении ω дается вторым выражением (38). Член, содержащий $\sin 3\omega t$, называется *третьей гармоникой* основной частоты. Из нашего обсуждения выражения (33) следует, что точное решение содержит бесконечное число гармоник, большинство из которых оказываются очень малыми. Из (33) следует, что амплитуда основной компоненты движения равняется θ_0; амплитуда компоненты третьей гармоники равна $\varepsilon\theta_0$.

7.2. Масса на пружине

В гл. 5 мы рассматривали пружину, которая подчинялась закону Гука для упругой силы:

$$F_x=-Cx, \tag{42}$$

где x — координата конца пружины. Если на конце пружины находится масса M и массой самой пружины можно пренебречь, то уравнение движения системы будет иметь вид

$$M\ddot{x}=-Cx,\quad \ddot{x}+\frac{C}{M}x=0. \tag{43}$$

Решение уравнения (43) будет таким же, как и уравнения (22). Как легко видеть, решение этого уравнения имеет вид *)

$$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi), \tag{44}$$

где A и φ — постоянные значения амплитуды и фазы.

*) С таким же успехом мы могли выбрать решение в виде

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)\quad\text{или}\quad x=B\cos\omega_0 t+D\sin\omega_0 t.$$

Выбор того или иного решения определяется из соображений удобства.