ном $\sin \omega t$. При $\theta_0 = 0{,}3$ *рад* $\varepsilon \approx 10^{-3}$, что составляет весьма малую величину. Коэффициент при члене, содержащем $\sin^2 \omega t \sin 3\omega t$, порядка ε или θ_0^2 и мал по сравнению с удержанными нами членами. Поэтому в рассматриваемом приближении мы пренебрегли этим членом.

Почему мы не включили в (33) член, содержащий $\sin 2\omega t$? Попробуйте сами рассмотреть решение в виде

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t + \eta\theta_0 \sin 2\omega t \tag{41}$$

и посмотрите, что из этого получится. Вы придете к выводу, что $\eta = 0$. Маятник совершает колебания, содержащие главным образом третью гармонику (т. е. в выражение для его отклонения входит член с $\sin 3\omega t$) и не содержащие второй гармоники. Другой результат мы получим в том случае, когда уравнение движения будет содержать член с θ^2.

Чему будет равна частота маятника при больших амплитудах? В этом случае движение не может характеризоваться только единственной частотой. Мы уже видели, что наиболее важный член (т. е. наибольший по величине) — это член с $\sin \omega t$, и поэтому частоту ω мы можем назвать *основной частотой* маятника. В нашем приближении ω дается вторым выражением (38). Член, содержащий $\sin 3\omega t$, называется *третьей гармоникой* основной частоты. Из нашего обсуждения выражения (33) следует, что точное решение содержит бесконечное число гармоник, большинство из которых оказываются очень малыми. Из (33) следует, что амплитуда основной компоненты движения равняется θ_0; амплитуда компоненты третьей гармоники равна $\varepsilon\theta_0$.

7.2. Масса на пружине

В гл. 5 мы рассматривали пружину, которая подчинялась закону Гука для упругой силы:

$$F_x = -Cx, \tag{42}$$

где x — координата конца пружины. Если на конце пружины находится масса M и массой самой пружины можно пренебречь, то уравнение движения системы будет иметь вид

$$M\ddot{x} = -Cx, \quad \ddot{x} + \frac{C}{M}x = 0. \tag{43}$$

Решение уравнения (43) будет таким же, как и уравнения (22). Как легко видеть, решение этого уравнения имеет вид *)

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{44}$$

где A и φ — постоянные значения амплитуды и фазы.

---

*) С таким же успехом мы могли выбрать решение в виде

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{или} \quad x = B\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t.$$

Выбор того или иного решения определяется из соображений удобства.

Покажем теперь, что (44) действительно является решением уравнения (43). Найдем $\dot{x}$ и $\ddot{x}$:

$$\dot{x}=\omega_0 A\cos(\omega_0 t+\varphi),\qquad \ddot{x}=-\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t+\varphi). \tag{45}$$

Далее из (45) и (43) получаем

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0. \tag{46}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (43), если положить

$$\omega_0=\left(\frac{C}{M}\right)^{1/2}. \tag{47}$$

Движение является гармоническим с угловой частотой ω_0. Амплитуда равна A. Фаза может быть определена из значений x и $\dot{x}$ при $t=0$. Из (44) и (45) находим, что

$$x_0=A\sin\varphi,$$
$$v_0=\omega_0 A\cos\varphi.$$

Из этих двух соотношений находим A и φ. Если положить $\varphi=\pi/2$, то

$$x=A\sin\left(\omega_0 t+\frac{1}{2}\pi\right)=$$
$$=A\cos\omega_0 t, \tag{48}$$

так как синус и косинус отличаются друг от друга только сдвигом фаз на $\pi/2$. Из (44) мы видим, что $\varphi=\pi/2$, если в момент времени $t=0$ пружина максимально растянута.

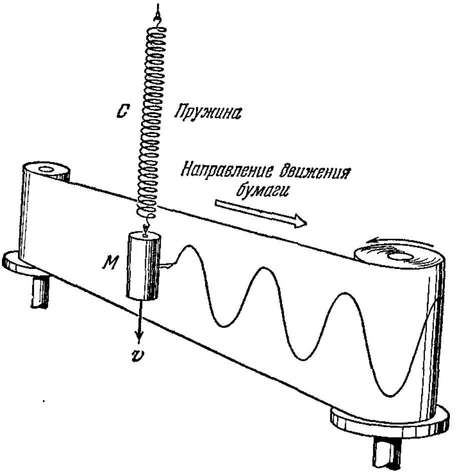

Рис. 7.6. Простой гармонический осциллятор, состоящий из массы M и невесомой пружины, упругая постоянная которой равна C. Перо, связанное с грузом, вырисовывает синусоидальную кривую на бумажной ленте, движущейся с постоянной скоростью мимо M.

Пример. *Средние значения кинетической и потенциальной энергий.* Вычислим средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий гармонического осциллятора.

Из (44) следует, что кинетическая энергия равна

$$K=\frac{1}{2}M\dot{x}^2=\frac{1}{2}M\left[\omega_0 A\cos(\omega_0 t+\varphi)\right]^2. \tag{49}$$

Среднее по времени *) значение кинетической энергии за один

*) Мы применяем угловые скобки $\langle\quad\rangle$ для обозначения среднего по времени значения, определяемого из соотношения

$$\langle x\rangle=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(t)\,dt.$$

Очевидно, что для функции $q(t)$, значения которой повторяются с периодом T, период T движения будет равно

$$\langle K\rangle = \frac{\int\limits_0^T K\,dt}{T} = \frac{1}{2} M\omega_0^2 A^2 \frac{\int\limits_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\,dt}{2\pi/\omega_0}, \tag{50}$$

где $2\pi/\omega_0 = T$. Так как интеграл вычисляется за полный период, то величина фазы не имеет значения, и для удобства мы можем положить $\varphi = 0$. Тогда, обозначая $y = \omega_0 t$, мы получаем

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 y\,dy = \frac{1}{2}, \tag{51}$$

где использовано тождество $\cos^2 y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y)$ и равенство нулю интеграла от $\cos 2y$. Из (51) мы видим, что среднее значение квадрата косинуса равно 1/2. Этот результат следует запомнить. Аналогичный результат получается и для среднего значения квадрата синуса *). Из (50) и (51) мы получаем для среднего значения кинетической энергии

$$\langle K\rangle = \frac{1}{4} M\omega_0^2 A^2. \tag{52}$$

Потенциальная энергия при $x = A \sin \omega_0 t$ равна

$$U = \frac{1}{2} Cx^2 = \frac{1}{2} CA^2 \sin^2 \omega_0 t. \tag{53}$$

По аналогии с (51) среднее значение квадрата синуса равно

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega_0} \sin^2 \omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}. \tag{54}$$

Полагая $\omega_0^2 = C/M$, из (53) получаем

$$\langle U\rangle = \frac{1}{4} CA^2 = \frac{1}{4} M\omega_0^2 A^2. \tag{55}$$

среднее по времени может быть вычислено также следующим образом:

$$\langle q\rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T q(t)\,dt.$$

*) Эти результаты мы легко можем получить из тригонометрического тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Усредняя это тождество в пределах 2π *рад*, мы получаем $\langle \sin^2 \varphi\rangle + \langle \cos^2 \varphi\rangle = 1$. Ввиду того, что разница между $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ состоит только в сдвиге фаз на $\pi/2$, мы находим, что $\langle \sin^2 \varphi\rangle = \langle \cos^2 \varphi\rangle = 1/2$. Аналогичное рассуждение может быть применено и к угловому среднему значению $\langle x^2\rangle$ на поверхности сферы. Если $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то и $\langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle = r^2$. Так как сфера симметрична по отношению к осям x, y и z, то должно выполняться соотношение $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle = \frac{1}{3} r^2$. Этот результат может быть получен и прямым вычислением.

Таким образом, $\langle U\rangle=\langle K\rangle$, и полная энергия гармонического осциллятора равна

$$\boxed{E=\langle K\rangle+\langle U\rangle=\frac{1}{2}M\omega_0^2A^2.} \tag{56}$$

Заметим, что $E=\langle E\rangle$, так как при движении полная энергия сохраняется постоянной.

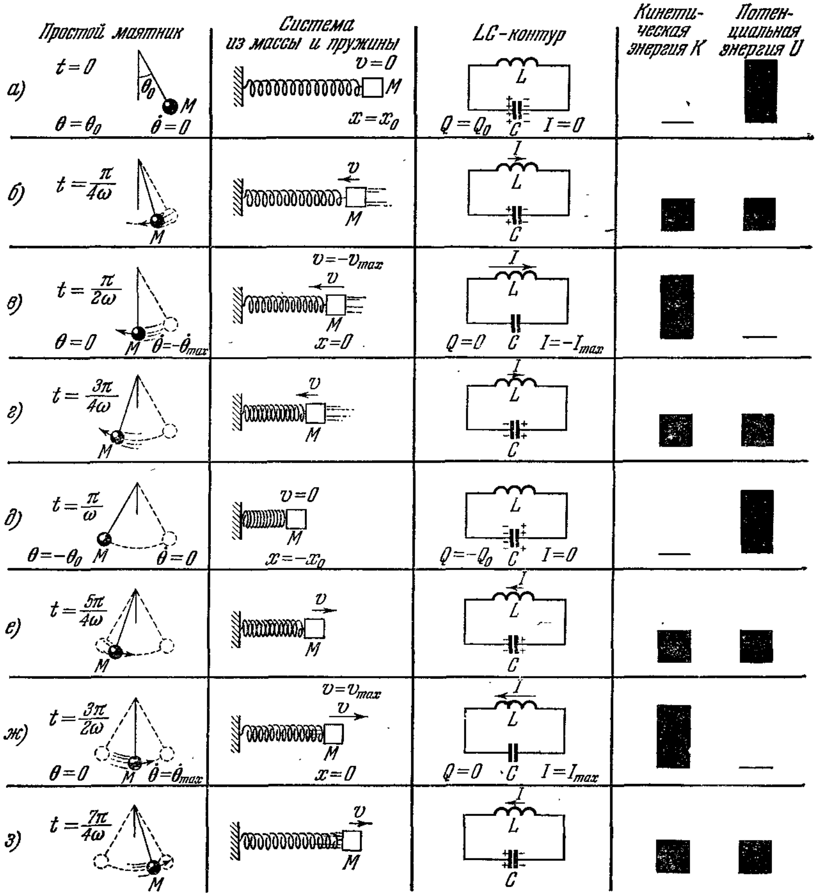

Рис. 7.7. Три различных гармонических осциллятора с одинаковым периодом: математический маятник, масса на пружине и LC-контур. Время растет в направлении от *а*) к *з*); следующий цикл снова начинается с *а*).

Равенство средних значений кинетической и потенциальной энергий является специфическим свойством гармонического осциллятора. Этим свойством не обладают ангармонические осцилляторы. Позже мы покажем, что этим свойством обладают и слабо затухающие осцилляторы.