7.3. Контур, состоящий из емкости *C* и самоиндукции *L*

Сейчас мы забежим немного вперед и рассмотрим электрический контур, с которым вы познакомитесь в лаборатории и во втором томе (этот раздел, так же как и задачи 8 и 9, может быть пропущен, если учащиеся не имеют предварительной подготовки по элементам электрических контуров). Рассмотрим контур, не обладающий сопротивлением и состоящий из самоиндукции L и емкости C, к которому приложено переменное напряжение V. Мы знаем, что падение напряжения на самоиндукции V_L равно

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (57)$$

где I — сила тока. Падение напряжения V_C на пластинах конденсатора равно

$$V_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int I\,dt, \qquad (58)$$

где Q — заряд, равный интегралу от тока по времени. Знак выбирается из соображений удобства. Сумма всех значений напряжения должна быть равна нулю. Поэтому $V+V_L+V_C=0$, или

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int I\,dt = V; \qquad (59)$$

обозначая $-\int I\,dt = Q$, находим

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{C}Q = -V. \qquad (60)$$

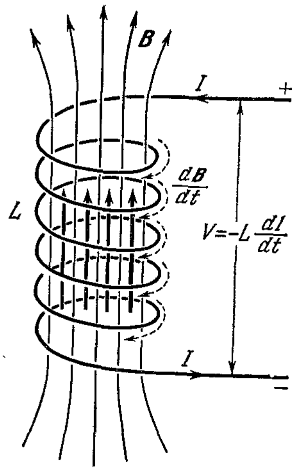

Рис. 7.8. Катушка индуктивности L, по которой идет ток I. Если I возрастает, то увеличивается и **B**. Направление $d\mathbf{B}/dt$ изображено на рисунке жирными стрелками. В соответствии с законом Фарадея в витках индуцируется электрическое поле при изменении магнитного поля. Направление электрического поля изображено пунктирными стрелками. Полное падение напряжения на концах катушки равно $V=\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$. Так как V возрастает в направлении, противоположном dI/dt, то $V=-L\,(dI/dt)$, где L — коэффициент пропорциональности.

Сравнивая (59) с соотношением $M\ddot{x}+C_{\text{пруж}}\,x=F$ для массы M на пружине, растягиваемой силой F, мы видим, что существует аналогия между следующими величинами:

$$Q \leftrightarrow x, \quad -V \leftrightarrow F, \quad L \leftrightarrow M, \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow C_{\text{пруж}}. \qquad (61)$$

Решение уравнения (60) для случая $V=0$, по аналогии с решением для пружины, можно искать в виде

$$I = I_0 \sin\omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}. \qquad (62)$$

Падение напряжения на концах катушки самоиндукции может быть найдено из (57) и (62):

$$V_L = -L\dot{I} = -L\omega_0\cos\omega_0 t. \qquad (63)$$

Падение напряжения на пластинах конденсатора равно

$$V_C = -\frac{1}{C}\int I\,dt = \frac{1}{\omega_0 C}\cos\omega_0 t. \qquad (64)$$

Из определения ω_0, даваемого (62), мы видим, что амплитуды V_L и V_C одинаковы.

7.4. Трение

До сих пор мы пренебрегали влиянием трения на гармонический осциллятор. Влияние трения проявляется в том, что движение гармонического осциллятора затухает. Когда в уравнении движения учитывается трение, решение оказывается более близким к реальным условиям. Каким образом мы можем ввести трение в уравнение движения для свободной частицы? Трение выражается в действии на частицу тормозящей силы. Если на частицу действует только одна сила трения, то по второму закону Ньютона

$$M\ddot{x} = F_{\text{тр}}. \qquad (65)$$

Сила трения должна быть направлена в сторону, противоположную скорости, и в простейшем случае пропорциональна величине скорости (что, вообще говоря, само по себе не очевидно; ниже будут рассмотрены примеры):

$$F_{\text{тр}} = -\gamma\dot{x}, \qquad (66)$$

где γ — положительный постоянный коэффициент, называемый коэффициентом затухания. Таким образом, уравнение движения частицы, движущейся только под действием силы трения, имеет вид

$$M\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0. \qquad (67)$$

Иногда полезно ввести постоянную величину τ, называемую *временем релаксации* и определяемую соотношением

$$\gamma \equiv \frac{M}{\tau}. \qquad (68)$$

После этого уравнение (67) принимает вид

$$M\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}\right) = 0. \qquad (69)$$

Мы видим, что τ действительно имеет размерность времени. Если обозначить скорость $v \equiv \dot{x}$, то это уравнение можно записать в другом виде:

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = 0. \qquad (70)$$