Падение напряжения на пластинах конденсатора равно

$$V_C = -\frac{1}{C}\int I\,dt = \frac{1}{\omega_0 C}\cos\omega_0 t. \tag{64}$$

Из определения ω_0, даваемого (62), мы видим, что амплитуды V_L и V_C одинаковы.

7.4. Трение

До сих пор мы пренебрегали влиянием трения на гармонический осциллятор. Влияние трения проявляется в том, что движение гармонического осциллятора затухает. Когда в уравнении движения учитывается трение, решение оказывается более близким к реальным условиям. Каким образом мы можем ввести трение в уравнение движения для свободной частицы? Трение выражается в действии на частицу тормозящей силы. Если на частицу действует только одна сила трения, то по второму закону Ньютона

$$M\ddot{x} = F_{\text{тр}}. \tag{65}$$

Сила трения должна быть направлена в сторону, противоположную скорости, и в простейшем случае пропорциональна величине скорости (что, вообще говоря, само по себе не очевидно; ниже будут рассмотрены примеры):

$$F_{\text{тр}} = -\gamma\dot{x}, \tag{66}$$

где γ — положительный постоянный коэффициент, называемый коэффициентом затухания. Таким образом, уравнение движения частицы, движущейся только под действием силы трения, имеет вид

$$M\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0. \tag{67}$$

Иногда полезно ввести постоянную величину τ, называемую *временем релаксации* и определяемую соотношением

$$\gamma \equiv \frac{M}{\tau}. \tag{68}$$

После этого уравнение (67) принимает вид

$$M\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}\right) = 0. \tag{69}$$

Мы видим, что τ действительно имеет размерность времени. Если обозначить скорость $v \equiv \dot{x}$, то это уравнение можно записать в другом виде:

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = 0. \tag{70}$$

Это очень важное дифференциальное уравнение. Его можно переписать в виде

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

или

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{t} dt, \tag{71}$$

где v_0— скорость в момент времени $t=0$. Интегрируя, получаем

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{или} \quad \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau}. \tag{72}$$

Отсюда находим

$$v = v_0 e^{-t/\tau}. \tag{73}$$

Скорость уменьшается со временем по экспоненциальному закону (рис. 7.9); в этом случае мы можем сказать, что уменьшение скорости со временем характеризуется постоянной величиной τ. Уменьшение кинетической энергии K свободной частицы может быть найдено из (73):

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 e^{-2t/\tau} = K_0 e^{-2t/\tau}. \tag{74}$$

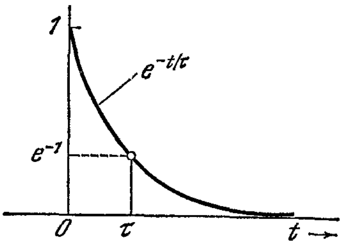

Рис. 7.9. График зависимости функции $e^{-t/\tau}$ от t.

Дифференцируя (74), получаем

$$\dot{K} = -\frac{2}{\tau}K. \tag{75}$$

Эффективное время релаксации для кинетической энергии составляет половину от времени релаксации для скорости.

Каков же механизм, приводящий к возникновению тормозящей силы, выражаемой соотношением (66)? Это соотношение относится к некоторому идеализированному случаю, который можно реализовать лишь при определенных условиях. Омическое электрическое сопротивление приводит к затуханию, или торможению, которое выражается таким же образом, как и (66). Падение напряжения V_R на идеальной катушке сопротивления по закону Ома равно

$$V_R = IR. \tag{76}$$

Уравнение движения для контура, состоящего из сопротивления R и самоиндукции L, получается из (57) и (76):

$$L\dot{I} + RI = 0. \tag{77}$$

Это уравнение совпадает с (70), если положить $\tau = L/R$. Микроскопический механизм, приводящий к закону Ома, рассматривается во втором томе.

Отчетливое представление о тормозящей силе $F_{\text{тр}}=-\gamma\dot{x}$ можно также получить, рассматривая движение плоской пластинки в направлении, перпендикулярном ее плоскости, сквозь газ при очень низком давлении, при условии, что скорость V пластинки значительно меньше *), чем средняя скорость v молекул газа (рис. 7.10). Давление должно быть достаточно низким, для того чтобы мы могли пренебречь столкновениями молекул друг с другом. Скорость, с которой молекулы ударяются о пластинку, пропорциональна относительной скорости набегающих молекул и пластинки. Предположим, что молекулы движутся только в одном направлении. С одной стороны пластинки относительная скорость равна $v+V$, а с другой $v-V$. Давление пропорционально скорости, с которой молекулы ударяются о пластинку, умноженной на среднее значение импульса, переносимого молекулой. Среднее значение импульса в свою очередь само пропорционально относительной скорости, и поэтому давления P_1 и P_2 по обе стороны пластинки будут равны

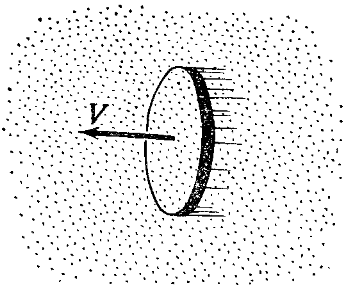

Рис. 7.10. На плоскую пластинку, которая движется в газе, перпендикулярно к ее плоскости при очень низком давлении действует тормозящая сила, пропорциональная ее скорости V (если V значительно меньше, чем средняя скорость молекул газа).

$$P_1 \backsim (v+V)^2, \quad P_2 \backsim (v-V)^2. \tag{78}$$

«Чистое» давление P будет равно разности давлений с обеих сторон пластинки:

$$P=P_1-P_2 \backsim 4vV. \tag{79}$$

Поэтому лобовое сопротивление («чистая» сила, действующая на движущуюся пластинку) будет прямо пропорционально скорости V пластинки. Направление силы лобового сопротивления будет противоположно направлению движения пластинки.

7.5. Затухающий гармонический осциллятор

Если мы учтем тормозящую силу, то полная сила, действующая на невозбужденный гармонический осциллятор, будет равна

$$F_{\text{пруж}}+F_{\text{тр}}=-Cx-\gamma\dot{x}. \tag{80}$$

Эту полную силу мы можем приравнять $M\ddot{x}$ и получить уравнение движения в виде

$$M\ddot{x}+\gamma\dot{x}+Cx=0. \tag{81}$$

*) Случай, когда пластинка движется со скоростью большей, чем скорость молекул, был рассмотрен в гл. 6, когда речь шла о падении метеоритов. В обеих задачах для простоты мы допускаем, что средняя длина свободного пробега молекул велика по сравнению с размерами пластинки.