Отчетливое представление о тормозящей силе $F_{\text{тр}}=-\gamma\dot{x}$ можно также получить, рассматривая движение плоской пластинки в направлении, перпендикулярном ее плоскости, сквозь газ при очень низком давлении, при условии, что скорость V пластинки значительно меньше *), чем средняя скорость v молекул газа (рис. 7.10).

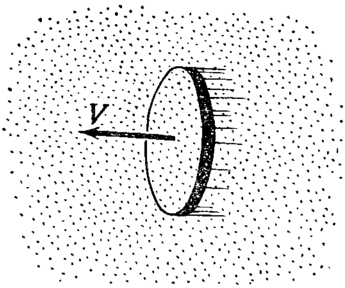

Рис. 7.10. На плоскую пластинку, которая движется в газе, перпендикулярно к ее плоскости при очень низком давлении действует тормозящая сила, пропорциональная ее скорости V (если V значительно меньше, чем средняя скорость молекул газа).

Давление должно быть достаточно низким, для того чтобы мы могли пренебречь столкновениями молекул друг с другом. Скорость, с которой молекулы ударяются о пластинку, пропорциональна относительной скорости набегающих молекул и пластинки. Предположим, что молекулы движутся только в одном направлении. С одной стороны пластинки относительная скорость равна $v+V$, а с другой $v-V$. Давление пропорционально скорости, с которой молекулы ударяются о пластинку, умноженной на среднее значение импульса, переносимого молекулой. Среднее значение импульса в свою очередь само пропорционально относительной скорости, и поэтому давления P_1 и P_2 по обе стороны пластинки будут равны

$$P_1 \backsim (v+V)^2, \quad P_2 \backsim (v-V)^2. \tag{78}$$

«Чистое» давление P будет равно разности давлений с обеих сторон пластинки:

$$P=P_1-P_2 \backsim 4vV. \tag{79}$$

Поэтому лобовое сопротивление («чистая» сила, действующая на движущуюся пластинку) будет прямо пропорционально скорости V пластинки. Направление силы лобового сопротивления будет противоположно направлению движения пластинки.

7.5. Затухающий гармонический осциллятор

Если мы учтем тормозящую силу, то полная сила, действующая на невозбужденный гармонический осциллятор, будет равна

$$F_{\text{пруж}}+F_{\text{тр}}=-Cx-\gamma\dot{x}. \tag{80}$$

Эту полную силу мы можем приравнять $M\ddot{x}$ и получить уравнение движения в виде

$$M\ddot{x}+\gamma\dot{x}+Cx=0. \tag{81}$$

*) Случай, когда пластинка движется со скоростью большей, чем скорость молекул, был рассмотрен в гл. 6, когда речь шла о падении метеоритов. В обеих задачах для простоты мы допускаем, что средняя длина свободного пробега молекул велика по сравнению с размерами пластинки.

Это линейное дифференциальное уравнение. Мы можем его переписать следующим образом:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,} \tag{82}$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M}, \qquad \omega_0^2 = \frac{C}{M}. \tag{83}$$

Решение уравнения (82) можно искать в виде затухающего синусоидального колебания

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t, \tag{84}$$

где величины β и ω могут быть определены. Это решение представляет собой комбинацию решений (44) и (73). С таким же успехом

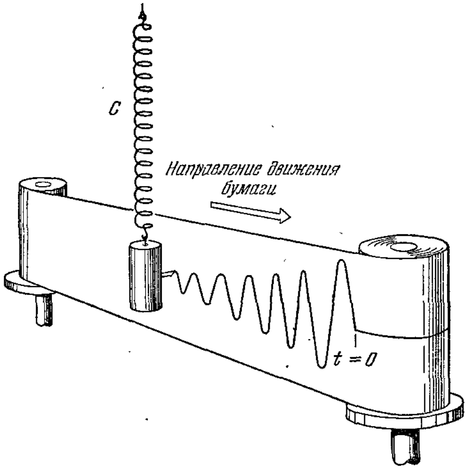

Рис. 7.11. Колебания всех реальных гармонических осцилляторов затухают под действием сил трения, таких, например, как сопротивление воздуха. Система из массы и пружины при небольшом затухании должна описываться такой же кривой, как и та, которая изображена на бумажной ленте, движущейся с постоянной скоростью. Эта система начала совершать колебания в момент времени $t=0$.

мы могли бы искать решение уравнения (82) в форме $x=x_0e^{-\beta t}\cos\omega t$. Дифференцируя теперь (84), находим

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t + \omega x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t, \tag{85}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t - 2\beta\omega x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t - \omega^2 x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t. \tag{86}$$

Подставляя значения $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в (82), получаем это уравнение в следующем виде:

$$\left(\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\beta}{\tau}\right) x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t + \left(-2\omega\beta + \frac{\omega}{\tau}\right) x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t = 0. \tag{87}$$

Из этого уравнения следует, что коэффициент при $\sin \omega t$ будет равен нулю, если мы положим

$$\beta = \frac{1}{2\tau}, \tag{88}$$

а коэффициент при $\cos \omega t$ обратится в нуль при условии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \beta^2 - \frac{\beta}{\tau} = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2, \tag{89}$$

или

$$\omega = \left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{1/2} = \omega_0 \left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{90}$$

Таким образом, при наличии трения частота уменьшается. Частота ω будет равна ω_0 только в том случае, если время релаксации бесконечно велико (т. е. затухание отсутствует).

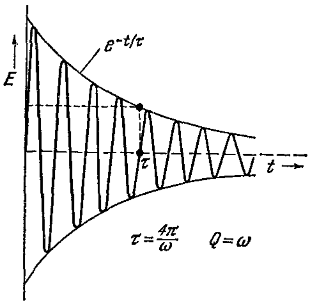

Рис. 7.12. График зависимости потенциальной энергии осциллятора, для которого Q равно 8π, от времени. В момент времени t, когда произошло четыре полных колебания, ордината точки на огибающей кривой в e раз меньше первоначального значения функции.

Если β и ω выражаются соотношениями (88) и (90), то (84) является решением уравнения движения (81). Это решение имеет вид

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \sin\left\{\omega_0 t \left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{91}$$

Если $\omega_0\tau \gg 1$, мы получаем предельное значение *малого затухания*, приближенно описываемого уравнением

$$x \cong x_0 e^{-t/2\tau} \sin \omega_0 t, \tag{92}$$

которое следует из (91). В этом уравнении ω_0 — собственная частота незатухающего осциллятора.

П р и м е р. *Диссипация мощности.* Рассчитаем теперь скорость диссипации энергии затухающего гармонического осциллятора для предельного случая слабого затухания при $\omega_0\tau \gg 1$, т. е. при $\omega \cong \omega_0$.

Кинетическая энергия $K = {}^1/_2 M\dot{x}^2$. Из приближенного решения (92) получаем

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\tau} x_0 e^{-t/2\tau} \sin \omega_0 t + \omega_0 x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t. \tag{93}$$

Отсюда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \cos^2 \omega_0 t - \left(\frac{\omega_0}{\tau}\right) x_0^2 e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t. \tag{94}$$

Значения интегралов, с которыми нам придется встретиться при вычислении среднего по времени значения $(dx/dt)^2$, можно найти в соответствующих таблицах. Однако для случая $\omega_0 t \gg 1$ множитель $e^{-t/\tau}$ можно с хорошим приближением вынести за угловые скобки, означающие усреднение по времени. Это может быть сделано с достаточной точностью, если допустить, что амплитуда колебаний $x_0 e^{-t/2\tau}$ существенно не изменяется за время одного периода. Для средних значений можем написать, что

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos\theta \sin\theta \rangle = 0. \tag{95}$$

Последнее соотношение, с которым мы еще не встречались, имеет весьма важное значение:

$$\langle \sin\theta \cos\theta \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \sin 2\theta \right\rangle = 0, \tag{96}$$

так как средние значения от синуса и косинусы равны нулю. Таким образом, среднее значение кинетической энергии за один период будет равно

$$\langle K \rangle \cong \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle + \omega_0^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_0}{\tau} \langle \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \rangle \right] x_0^2 e^{-t/\tau} \cong \frac{1}{4} M \left[\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 + \omega_0^2 \right] x_0^2 \cdot e^{-t/\tau}. \tag{97}$$

Полагая, что величина $(1/2\tau)^2$ мала по сравнению с ω_0^2, получаем для среднего значения кинетической энергии

$$\langle K \rangle \cong \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \tag{98}$$

Из этого выражения мы видим, что средняя кинетическая энергия убывает со временем по экспоненциальному закону. Среднее значение потенциальной энергии равно

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 x_0^2 \langle e^{-t/\tau} \sin^2 \omega_0 t \rangle \cong \frac{1}{4} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \tag{99}$$

Среднее значение энергии, рассеиваемой в единицу времени (т. е. диссипация мощности P), равно взятой с обратным знаком скорости изменения энергии со временем:

$$-\langle P \rangle = \frac{d}{dt} \langle E \rangle \cong \frac{d}{dt} (\langle K \rangle + \langle U \rangle) \cong -\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} M \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \right),$$

или

$$\langle P(t) \rangle = \frac{\langle E(t) \rangle}{\tau}. \tag{100}$$

Обычно, когда ясно, о чем идет речь, мы не заключаем $P(t)$ в угловые скобки.

Для студента может показаться удивительным, что средние величины, выражаемые соотношениями (98) и (99), содержат время t, несмотря на то что они являются средними значениями по времени. Дело в том, что мы рассматриваем движение затухающего осциллятора в течение многих периодов и рассматриваемые нами величины представляют собой средние значения энергии (кинетической или потенциальной) *за один период в течение некоторого* *времени* t. Так как энергия при рассеянии переходит в тепло, то очевидно, что средняя энергия (за один период) уменьшается от периода к периоду.

Можно показать, что диссипация мощности равна взятой со знаком минус средней скорости, с которой сила трения $F_{тр}=-\gamma\dot{x}=-(M/\tau)\dot{x}$ совершает работу. Используя (93) и допуская, что $\omega_0\tau\gg 1$ и, следовательно, множитель $e^{-t/\tau}$ может быть вынесен за угловые скобки, мы можем написать для средней скорости, с которой совершается работа, следующее выражение:

$$\langle F_{тр}v\rangle \cong -\frac{M}{\tau}\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\langle\cos^2\omega_0 t\rangle \cong -\frac{1}{2\tau}M\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \cong -\frac{E(t)}{\tau}, \tag{101}$$

в согласии со (100).

7.6. Добротность Q

Для характеристики осциллирующей системы часто применяется величина Q, называемая *добротностью*. Эта величина Q представляет собой умноженное на 2π отношение запасенной энергии к среднему значению энергии, теряемому за один период:

$$Q = 2\pi\frac{\text{запасенная энергия}}{\langle\text{энергия, потерянная за один период}\rangle} = \frac{2\pi E}{P/\nu} = \frac{E}{P/\omega}, \tag{102}$$

так как период равен $1/\nu$ и $2\pi\nu=\omega$. Время, в течение которого фаза осциллятора изменится на $\theta=1$ *рад*, равно $1/\omega$. Заметим, что величина Q безразмерна.

Для слабо затухающего гармонического осциллятора ($\omega_0\tau\gg 1$) из (98), (99) и (100) получаем

$$Q \cong \frac{E}{E/\omega_0\tau} \cong \omega_0\tau. \tag{103}$$

Мы видим, что величина $\omega_0\tau$ может служить удобной характеристикой отсутствия затухания осциллятора. Большим значениям $\omega_0\tau$ или Q соответствует слабое затухание осциллятора. Из (98) и (99) следует, что энергия осциллятора за время τ уменьшается в e раз от своего первоначального значения; за это время осциллятор совершает $\omega_0\tau/2\pi$ колебаний. Порядок величины добротности некоторых важнейших типов затухающих осцилляторов приведен в таблице.

Некоторые типичные значения Q

Земля (сейсмические волны)	25—1400
Полый медный резонатор для микрорадиоволн	10^4
Рояльная или скрипичная струна	10^3
Возбужденный атом	10^7
Возбужденное ядро (Fe^{57})	$3\cdot 10^{12}$