7.7. Гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания

Теперь мы подробно рассмотрим вынужденные колебания затухающего гармонического осциллятора. *Эта задача имеет очень важное значение.* Если помимо силы трения на осциллятор действует внешняя сила $F(t)$, то уравнение движения будет иметь вид

$$M\ddot{x}+\gamma\dot{x}+Cx=F(t) \tag{104}$$

или, в более удобной форме,

$$\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F(t)}{M}, \tag{105}$$

где $\tau\equiv M/\gamma$ и $\omega_0^2\equiv C/M$. Здесь ω_0 — *собственная частота* системы в отсутствие трения и вынуждающей силы. Когда на систему действует вынуждающая сила с частотой ω, отличающейся от частоты ω_0, то, как мы увидим, колебания в системе будут происходить с частотой вынуждающей силы, но не с собственной частотой. Если, однако, вынуждающая сила внезапно перестает действовать, то система возвращается к затухающим колебаниям, частота которых приближенно будет соответствовать частоте собственных колебаний для случая малого затухания. Предположим, что в (105)

$$\frac{F(t)}{M}=\frac{F_0\sin\omega t}{M}\equiv\alpha_0\sin\omega t, \qquad \alpha_0\equiv\frac{F_0}{M}, \tag{106}$$

т. е. вынуждающая сила представляет собой синусоидальную функцию с частотой ω. Это соотношение определяет величину α_0. Мы вводим α_0 потому, что удобнее оперировать с F_0/M, чем с F_0.

Установившиеся колебания системы (колебания системы после кратковременных воздействий затухают) будут происходить с частотой вынуждающей силы. Другими словами, разность фаз между силой и смещением будет изменяться со временем. Это очень важная особенность полученного нами результата: установившиеся колебания совершающего вынужденные колебания гармонического осциллятора (даже при наличии затухания) происходят с *вынуждающей*, а не с собственной частотой ω_0. Уравнению движения будет удовлетворять только вынуждающая частота. В качестве характеристики воздействия вынуждающей силы на гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания, можно выбрать либо смещение x, либо скорость $\dot{x}$. Мы выберем в качестве такой характеристики смещение x. Будем искать решение уравнения (105) в виде

$$x=x_0\sin(\omega t+\varphi), \tag{107}$$

в котором мы должны определить амплитуду x_0 и фазу φ *).

---

*) Мы должны считать, что фаза φ (называемая также разностью фаз между смещением x и силой F) не равна нулю. Если не вводить φ, то решение не может быть получено. Когда мы говорим о фазе, то надо знать, о какой именно разности

В уравнении (107) ω представляет собой частоту вынуждающей силы, а не собственную частоту осциллятора; фаза φ — это разность фаз между вынуждающей силой и смещением осциллятора. Поэтому здесь φ имеет совершенно другое значение, чем то, с которым мы имели дело в случае невынужденных колебаний незатухающего гармонического осциллятора, когда величина φ определялась начальными условиями. Начальные условия не имеют значения для вынужденных колебаний осциллятора, если только рассматривается установившееся состояние.

Целесообразно уточнить, что мы подразумеваем под разностью фаз φ между смещением и вынуждающей силой. Как вынуждающая сила, так и смещение изменяются по простому гармоническому закону. Цикл изменения фазы от одного максимума до другого составляет 360°, или 2π *рад*. *Разность фаз соответствует разности фаз между смещением, достигшим своего максимального значения, и силой*. Например, предположим, что сила достигает наибольшего положительного значения в тот момент, когда смещение равно нулю, и затем возрастает в положительном направлении. Тогда смещение будет отставать от силы на $\pi/2$ *рад*. Но величина φ определена нами как фаза, на которую x *опережает* F, и поэтому в этот момент φ будет равно $-\pi/2$.

Теперь вычислим производные:

$$\frac{dx}{dt}=\omega x_0\cos(\omega t+\varphi),\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x_0\sin(\omega t+\varphi). \tag{108}$$

Тогда уравнение движения (105) примет вид

$$(\omega_0^2-\omega^2)\,x_0\sin(\omega t+\varphi)+\frac{\omega}{\tau}\,x_0\cos(\omega t+\varphi)=\alpha_0\sin\omega t. \tag{109}$$

Воспользуемся теперь тригонометрическими соотношениями

$$\sin(\omega t+\varphi)=\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi, \tag{110}$$

$$\cos(\omega t+\varphi)=\cos\omega t\cos\varphi-\sin\omega t\sin\varphi. \tag{111}$$

Подставляя эти значения в (109), получаем

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-\frac{\omega}{\tau}\sin\varphi\right]x_0\sin\omega t+\\ +\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi+\frac{\omega}{\tau}\cos\varphi\right]x_0\cos\omega t=\alpha_0\sin\omega t. \tag{112}$$

Уравнение (112) может быть удовлетворено лишь в том случае, если коэффициент при $\cos\omega t$ будет равен нулю. Из этого условия вытекает, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{113}$$

фаз идет речь. В электротехнике обычно говорят о разности фаз между током и напряжением. Здесь мы говорим о разности фаз между смещением и вынуждающей силой F. Фазы обеих величин не равны друг другу, так как аналогом тока является dx/dt, а не x.

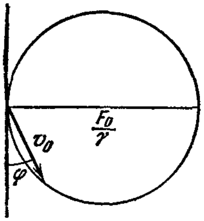

Рис. 7.13. Поведение гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания, может быть очень просто представлено с помощью «полярного графика». Строится круг, диаметр которого равен F_0/γ и в котором хорда OP образует с осью ординат угол φ.

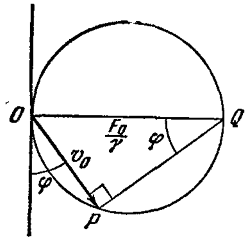

Рис. 7.14. При любом φ OPQ образует прямоугольный треугольник. Хорда $OP=-\frac{F_0}{\gamma}\sin\varphi$. Из уравнений (115), (116) и (117) мы видим, что хорда $OP=\omega x_0=v_0$ представляет собой амплитуду скорости.

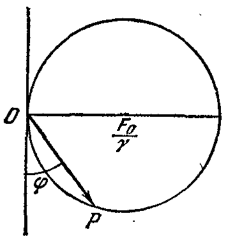

Рис. 7.15. Для $\omega \ll \omega_0$ $\varphi \approx 0$ и $v_0 \ll F_0/\gamma$. В этой области смещение очень мало.

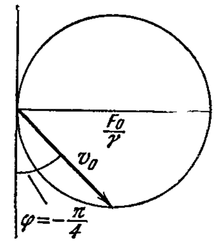

Рис. 7.16. Когда ω возрастает, $|\varphi|$ увеличивается так же, как и v_0. При $\varphi=-\pi/4$ $v_0=F_0/(\sqrt{2}\,\gamma)$.

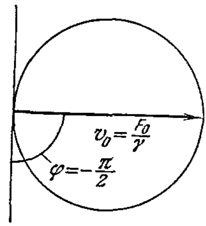

Рис. 7.17. При $\varphi=-\pi/2$ $\omega=\omega_0$ и $v_0=F_0/\gamma$. Амплитуда скорости *максимальна*, когда наступает *резонанс*.

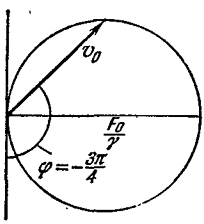

Рис. 7.18. Для $\omega > \omega_0$ v_0 снова уменьшается. При

$\varphi=-3\pi/4$

снова

$v_0=F_0/(\sqrt{2}\,\gamma)$.

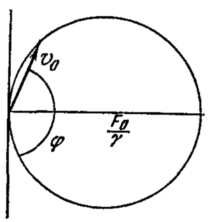

Рис. 7.19. Для $\omega \gg \omega_0$ снова $v_0 \ll F_0/\gamma$ и $\varphi \approx \approx -\pi$.

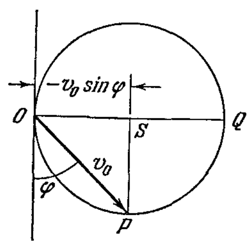

Рис. 7.20. Отрезок

$OS=-v_0 \sin\varphi$.

Из уравнений (127), (128) и (129) мы видим, что поглощенная мощность пропорциональна $-v_0\sin\varphi$, т. е. величине отрезка OS.

Необходимо также, чтобы коэффициенты при $\sin \omega t$ были равны, откуда находим, что

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - \dfrac{\omega}{\tau}\sin\varphi}. \tag{114}$$

Из (113) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2\right]^{1/2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{-\omega/\tau}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2]^{1/2}}, \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

после чего (114) приобретает следующий вид:

$$\boxed{x_0 = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)+(\omega/\tau)^2]^{1/2}}.} \tag{116}$$

Это выражение дает величину амплитуды.

Уравнения (115) и (116) дают нам искомое решение. Теперь мы знаем амплитуду x_0 и фазу φ смещения системы под действием вынуждающей силы $F = M\alpha_0 \sin \omega t$:

$$x = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2]^{1/2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega/\tau}{\omega^2-\omega_0^2}\right). \tag{117}$$

Разберем теперь предельные случаи, соответствующие этому решению. Напомним, что при нашем рассмотрении мы всегда предполагали затухание малым, т. е. $\omega_0\tau \gg 1$.

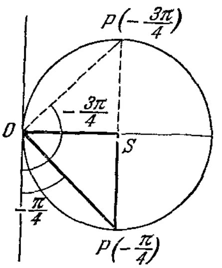

Рис. 7.21. Когда $\varphi = -\pi/4$ и $\varphi = -3\pi/4$, отрезок $OS = OS_{max}/2$. Поэтому в этих точках поглощенная мощность составляет *половину* ее максимального значения. *Максимальное* значение поглощенной мощности достигается при $\varphi = -\pi/2$ (резонанс).

Малая вынуждающая частота, $\omega \ll \omega_0$. В этом случае из (115) видно, что

$$\cos\varphi \to 1, \quad \sin\varphi \to -0, \tag{118}$$

откуда $\varphi \to 0$. Таким образом, в случае низкой частоты смещение и вынуждающая сила совпадают по фазе. Из (116) следует, что

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{M\alpha_0}{C} = \frac{F_0}{C}. \tag{119}$$

В этом случае смещение определяется пружиной, а не массой или трением.

Резонансная частота, $\omega = \omega_0$. В случае резонанса смещение может быть очень велико. Так как в различных приложениях мы очень часто используем резонансное значение смещения, мы рассмотрим этот случай более подробно. При $\omega = \omega_0$ вынуждающая частота равна собственной частоте системы в отсутствие трения. При этом мы получаем

$$\cos\varphi \to \pm 0, \quad \sin\varphi \to -1, \quad \varphi \to -\frac{\pi}{2}. \tag{120}$$

Амплитуда при $\omega=\omega_0$ будет равна

$$x_0=\frac{\alpha_0\tau}{\omega_0}. \tag{121}$$

Чем меньше затухание, тем больше τ и x_0. Полагая F_0 постоянной, мы можем найти из (119) и (120) отношение смещения в случае резонанса к смещению при нулевой вынуждающей частоте:

$$\frac{x_0\,(\omega=\omega_0)}{x_0\,(\omega=0)}=\frac{\alpha_0\tau/\omega_0}{\alpha_0/\omega_0^2}=\omega_0\tau=Q, \tag{122}$$

где Q — добротность, которую мы определили из соотношения (103). Эта величина может быть очень большой, порядка 10^4 или даже больше! Таким образом, в случае резонанса смещение определяется затуханием.

Максимального значения величина смещения x_0 достигает при частоте ω, не в точности равной $\omega=\omega_0$. Это следует из того, что производная от знаменателя (116) обращается в нуль, когда

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right]=2\,(\omega_0^2-\omega^2)\,(-2\omega)+\frac{2\omega}{\tau^2}=0 \tag{123}$$

при значении

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{1}{2\tau^2}. \tag{124}$$

Это значение ω определяет положение максимума смещения на кривой зависимости x_0 от ω. Если $\omega_0\tau\gg 1$, то положение максимума очень близко к $\omega=\omega_0$.

Может показаться странным, что максимум смещения получается при значении разности фаз, равном $-\pi/2$, т. е. когда разность фаз между силой и смещением составляет в точности 90°. Казалось бы логичным, чтобы резонанс наступал при $\varphi=0$, а не при $-\pi/2$. Однако тут есть хитрость: дело заключается в том, что мощность, поглощаемая осциллятором, зависит не непосредственно от разности фаз между вынуждающей силой и с к о р о с т ь ю. Достаточно немного подумать, чтобы сообразить, что наибольшее отклонение достигается в том случае, когда фазы скорости и вынуждающей силы в точности совпадают. В этом случае масса получает толчки в надлежащие моменты времени и в надлежащих положениях. Когда смещение равно нулю, скорость оказывается максимальной. Если в какой-то момент времени масса движется в положительном направлении, то для достижения наибольшего отклонения нужно, чтобы в этот же момент времени сила достигала бы своего наибольшего значения. В крайней точке, где скорость меняет знак, для достижения резонанса нужно, чтобы и сила в тот же момент времени также изменяла бы знак. Таким образом, при описании резонанса удобней всего говорить о разности фаз между скоростью и вынуждающей силой. Мы знаем, что скорость осциллятора опережает его смещение в точности на 90°. Следовательно, при резонансе, когда сила и скорость совпадают по фазе, нужно, чтобы сила опережала смещение на 90°, т. е. чтобы $\varphi=-\pi/2$.

Большая вынуждающая частота, $\omega \gg \omega_0$. В этом случае

$$\cos\varphi \to -1, \quad \sin\varphi \to 0, \quad \varphi \to -\pi \tag{125}$$

и

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}. \tag{126}$$

В этом предельном случае, когда вынуждающая частота велика, смещение уменьшается по закону $1/\omega^2$ и его величина определяется инерцией массы.

Заметим, что разность фаз φ между смещением и вынуждающей силой начинается с нуля при низких частотах, проходит через значение $-\pi/2$ при резонансе и достигает $-\pi$ при высоких частотах. Таким образом, *смещение всегда отстает от вынуждающей силы.*

Поглощение мощности. Среднее по времени значение работы, совершаемой вынуждающей силой в единицу времени над осциллирующей системой, может быть получено из (106) и (107):

$$P = \langle F\dot{x}\rangle = \frac{M\alpha_0^2\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2]^{1/2}}\langle \sin\omega t\cos(\omega t+\varphi)\rangle. \tag{127}$$

Принимая во внимание тождество

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi,$$

получаем

$$\langle \sin\omega t\,[\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi]\rangle = -\sin\varphi\,\langle \sin^2\omega t\rangle = -\frac{1}{2}\sin\varphi, \tag{128}$$

где мы использовали тот факт, что

$$\langle \sin\omega t\cos\omega t\rangle = 0.$$

Мы видим, что фаза играет здесь важную роль. Используя выражение (115) для $\sin\varphi$, мы можем переписать (127) в следующем виде:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}M\alpha_0^2\frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}.} \tag{129}$$

Это очень важный результат. Мощность, поглощаемая при резонансе, т. е. при $\omega=\omega_0$, равна

$$P_{\text{рез}} = \frac{1}{2}M\alpha_0^2\tau. \tag{130}$$

Мощность, поглощаемая осциллятором и выражаемая соотношением (129), уменьшается на половину резонансного значения при изменении частоты ω на величину $\pm(\Delta\omega)_{1/2}$, так что

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2-\omega^2 \equiv (\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega) \cong 2\omega_0(\Delta\omega)_{1/2}. \tag{131}$$

Поэтому полная ширина $2(\Delta\omega)_{1/2}$, соответствующая половине резонансного максимума поглощенной мощности, равна $1/\tau$. Используя выражение (103) для Q, получаем

$$Q = \omega_0\tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}} = \frac{\text{резонансная частота}}{\text{ширина резонансной кривой на уровне } 1/2}. \quad (132)$$

Следовательно, добротность Q характеризует остроту резонансной кривой.

Численный пример задачи о гармоническом осцилляторе. Пусть масса $M=1$ *г*; силовая постоянная $C=10^4$ *дин/см* и время релаксации $\tau=1/2$ *сек*. Тогда из (82) находим

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{1/2} = 10^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Из (124) для частоты свободных колебаний получаем

$$\left[\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}\right]^{1/2} = [10^4 - 2]^{1/2} \cong$$
$$\cong 10^2 \text{ сек}^{-1}.$$

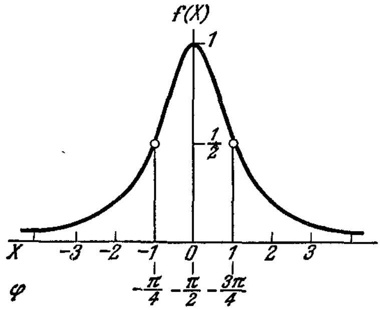

Рис. 7.22. Поглощенная мощность пропорциональна $f(X) = \frac{1}{1+X^2}$, где, в соответствии с уравнением (129),

$$X = \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega/\tau} = \operatorname{ctg}\varphi.$$

При $\varphi \approx 0$ величина $X = \operatorname{ctg}\varphi$ становится большой и отрицательной. При $\varphi = -\pi/2$ величина $X = \operatorname{ctg}\varphi = 0$ и поглощенная мощность принимает максимальное значение. Половинной величине мощности, как это видно из чертежа, соответствует значение $X = \pm 1$. Функция $f(X) = 1/(1+X^2)$ называется функцией Лоренца.

Добротность Q системы по формуле (103) будет равна

$$Q \cong \omega_0\tau = 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз от своего первоначального значения (для свободной системы), равно $2\tau = 1$ *сек* в соответствии с (91). Постоянная затухания $\gamma = M/\tau = 2$ *г/сек*. Пусть теперь на систему действует вынуждающая сила

$$F = M\alpha_0 \sin\omega t = 10 \sin 90t \text{ дин}.$$

Тогда $\alpha_0 = F_0/M = 10$ *дин/г* и вынуждающая частота $\omega = 90$ *сек*$^{-1}$. Амплитуду можно вычислить из соотношения (116):

$$x_0 \cong \frac{10}{[4\cdot 10^6 + 4\cdot 10^4]^{1/2}} \cong 5\cdot 10^{-3} \text{ см},$$

а фазу — из (113):

$$\operatorname{tg}\varphi \cong -\frac{180}{1{,}9\cdot 10^3} \cong -0{,}1,$$

или $\varphi \cong -0{,}1$ *рад* $\cong -6°$. Следовательно, в течение каждого периода смещение будет достигать максимального значения спустя $0{,}1$ *рад*/90 *рад*·*сек*$^{-1} \approx 10^{-3}$ *сек* после того, как сила достигнет своего максимального значения.

Мы можем сравнить найденное значение амплитуды со значениями амплитуды для предельного случая при $\omega\to 0$ и при резонансе. Из (119) мы находим, что $x_0(\omega=0)=\alpha_0/\omega_0^2=10/10^4$ *см* $=10^{-3}$ *см*. В случае резонанса из (122) получаем

$$x_0(\omega=\omega_0)=Qx_0(\omega=0)=50\cdot 10^{-3}\ см=5\cdot 10^{-2}\ см.$$

Полуширина резонансной кривой *) равна

$$2(\Delta\omega)_{1/2}=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{100}{50}\ сек^{-1}=2\ сек^{-1}.$$

Заметим, что в этом примере мы повсюду применяли термин «частота», подразумевая в действительности «угловую частоту». Для того чтобы получить значение обычной частоты, т. е. число колебаний в единицу времени, следует угловую частоту разделить на 2π.

7.8. Принцип суперпозиции

Одно из важнейших свойств гармонического осциллятора состоит в том, что решения являются аддитивными: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ представляют собой движения под действием вынуждающих сил $F_1(t)$ и $F_2(t)$, то $x_1(t)+x_2(t)$ будет представлять собой движение под действием вынуждающей силы $F_1(t)+F_2(t)$. Это означает, что если мы знаем смещения x_1 и x_2 под действием одних только сил F_1 и F_2 соответственно, то мы можем найти результирующее смещение под действием обеих сил, складывая x_1 и x_2. Это свойство непосредственно следует из уравнения движения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)(x_1+x_2)=$$
$$=\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_1+\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_2=F_1+F_2. \quad (133)$$

Законность применения принципа суперпозиции к решению уравнения движения гармонического осциллятора является следствием линейности этого уравнения, содержащего x только в первой степени. Когда уравнение содержит ангармонические члены, картина совершенно меняется. Если в уравнении движения содержится член x^2, то это указывает на наличие двух вынуждающих частот ω_1 и ω_2, приводящих к появлению целого набора гармонических частот ($2\omega_1$, $3\omega_1$, ..., $2\omega_2$, $3\omega_2$, ...) и комбинации «побочных» частот ($\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$, $\omega_1-2\omega_2$ и т. д.).

Задачи

1. *Математический маятник.* Маятник состоит из легкой нити длиной $L=100$ *см* и тяжелой массы $M=1\cdot 10^3$ *г*.

а) Чему равен период маятника для малых отклонений?

Ответ. 2,0 *сек.*

---

*) Разность абсцисс, определяемых двумя ординатами, равными $^1/_2$ высоты резонансной кривой. (*Прим. ред.*)